10 ª Aula 2006.03.17 AMIV LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

10.1 Convergência uniforme de séries

Exemplo 10.1 (Série geométrica) *Considere-se a série geométrica*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

com $z \in \mathbb{C}$. Vamos analisar a sua região de convergência: i. e. para que valores de $z \in \mathbb{C}$ a série converge.

Se $|z| \geqslant 1$, então $|z^n| = |z|^n \geqslant 1$, portanto z^n não tende para zero, concluindo-se que a série é divergente[1]*.*

Por outro lado

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1} z^n &= 1 + z + z^2 + \cdots + z^{N-1} \\
&= \frac{1-z}{1-z} \sum_{n=0}^{N-1} z^n \qquad \text{, excluindo o caso trivial } z = 1 \\
&= \frac{1}{1-z} \sum_{n=0}^{N-1} (1-z)\, z^n = \frac{1}{1-z} \sum_{n=0}^{N-1} \left(z^n - z^{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{1-z} \left((1-z) + \left(z - z^2\right) + \left(z^2 - z^3\right) + \cdots + \left(z^{N-1} - z^N\right)\right) \\
&= \frac{1-z^N}{1-z}.
\end{aligned}$$

Se $|z| < 1$, então $\lim_{N\to+\infty} \left|z^N\right| = \lim_{N\to+\infty} |z|^N = 0$ e

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} z^n &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N-1} z^n = \lim_{N\to+\infty} \frac{1-z^N}{1-z} \\
&= \frac{1}{1-z}.
\end{aligned}$$

---

[1] De facto, se $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$ é uma série convergente de números complexos e a_n e b_n são a parte real e a parte imaginária de w_n respectivamente (i. e. $w_n = a_n + ib_n$), temos

$$\begin{aligned}
\sum^{+\infty} w_n \text{ converge} &\Rightarrow \sum^{+\infty} a_n \text{ converge e } \sum^{+\infty} b_n \text{ converge} \\
&\Rightarrow a_n \to 0 \text{ e } b_n \to 0 \\
&\Rightarrow w_n \to 0.
\end{aligned}$$

Ou seja o termo geral de uma série convergente é um infinitésimo.

Dado um ponto z tal que $|z| < 1$ e um erro $\varepsilon > 0$, vamos determinar o número de termos N, da soma finita, que precisamos calcular para obtermos uma aproximação a menos de um erro ε no valor da série:

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \right| = \left| \frac{1-z^N}{1-z} - \frac{1}{1-z} \right| = \frac{|z|^N}{|1-z|} < \varepsilon$$

aplicando logaritmos

$$N \log |z| - \log |1-z| < \log \varepsilon$$

donde[2]

$$N > \frac{\log \varepsilon + \log |1-z|}{\log |z|}.$$

Se z estiver cada vez mais próximo da circunferência $|z| = 1$, então o número N terá que ser cada vez maior. Portanto o número de parcelas que são necessárias calcular para obter um resultado com uma certa aproximação dada depende do ponto z que consideramos no círculo $|z| < 1$. Nesta situação dizemos que ***a convergência da série não é uniforme no círculo*** *$|z| < 1$.*

Contudo se em vez do círculo unitário, considerarmos o circulo $|z| \leqslant \frac{1}{2}$, então

$$\begin{aligned} \frac{|z|^N}{|1-z|} &\leqslant \frac{|z|^N}{1-|z|} \leqslant \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^N}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} \leqslant \frac{1}{2^{N-1}} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

se

$$N > \log_2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) + 1.$$

Pelo que, o número de parcelas necessárias para obter uma aproximação a menos de ε do valor da série, pode ser escolhido de forma independente da escolha do ponto z no domínio considerado. Dizemos neste caso que ***a série converge uniformemente no círculo*** *$|z| \leqslant \frac{1}{2}$.*

De forma rigorosa podemos definir convergência uniforme do seguinte modo:

Definição 10.1 *Dadas as funções $f_n(z)$ definidas num conjunto D, a série de funções $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ converge uniformemente em D para a função $f(z)$ se*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_0 \; : \; N \geqslant N_0 \Rightarrow \left(\forall z \in D \; : \; \left| f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n(z) \right| < \varepsilon \right)$$

Portanto, existe convergência uniforme de uma série de funções num certo conjunto D (não necessariamente o domínio da função) se a série pode ser bem aproximada por uma soma finita em todo o conjunto D; o número de parcelas a considerar nessa aproximação não depende do ponto em D aonde se calcula a série.

Para verificar se uma série de funções é uniformemente convergente é-nos útil o seguinte critério.

[2] Note-se $\log |z| < 0$.

Teorema 10.1 (Critério de Weierstrass) *Dadas as funções $f_n(z)$ definidas num conjunto D, seja M_n uma sucessão de reais positivos tais que*

1. $\forall z \in D \ : \ |f_n(z)| \leqslant M_n$.
2. *A série* $\sum_{n=0}^{+\infty} M_n$ *é convergente*

Então a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ *é uniformemente convergente em* D.

Demonstração. *Pelo critério da comparação, temos que para cada* $z \in D$ *a série* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z) \equiv f(z)$ *é convergente. Então dado* $\varepsilon > 0$, *seja* N_0 *tal que* $\sum_{n=N_0}^{+\infty} M_n < \varepsilon$; *obtemos para* $N > N_0$

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n(z) \right| = \left| \sum_{n=N}^{+\infty} f_n(z) \right| \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} |f_n(z)| \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} M_n \leqslant \sum_{n=N_0}^{+\infty} M_n < \varepsilon.$$

■

Exemplo 10.2 *A série de funções* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nz)}{n^n}$ *é uniformemente convergente no círculo* $|z| \leqslant 1$. *De facto (para* $|z| \leqslant 1$*)*

$$\left| \frac{\cos(nz)}{n^n} \right| = \frac{|e^{inz} + e^{-inz}|}{2n^n} \leqslant \frac{|e^{inz}| + |e^{-inz}|}{2n^n} \leqslant \frac{e^{n|z|} + e^{n|z|}}{2n^n} \leqslant \frac{e^n}{n^n}$$

e pelo critério da raiz a série de termos positivos $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n}{n^n}$, *é convergente. Estamos portanto nas condições do critério do critério de Weierstrass.*

10.2 Séries de potências

Definição 10.2 *Dado uma sucessão de números complexos* a_n *e um número complexo* z_0 *define-se a* ***série de potências*** *de coeficientes* a_n *e centro* z_0 *por:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{10.1}$$

sendo, portanto, uma função da variável complexa z *definida nos pontos onde for convergente. Note-se que o coeficiente* a_n *multiplica a potência* n *de* $z - z_0$, *pelo que o índice* n *no coeficiente* a_n *não é arbitrário.*

Exemplo 10.3 *A série* $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^{n^2+n} (z + \pi - i)^{n^2}$ *é uma série de potências. De facto esta série pode-se escrever na forma:* *(n é um quadrado perfeito se existe um inteiro* k *tal que* $n = k^2$*)*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{com } a_n = \begin{cases} 3^{n+\sqrt{n}} & \text{se } n \text{ é um quadrado perfeito} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad z_0 = -\pi + i.$$

Definição 10.3 *Dada uma série de potências (10.1) de coeficientes a_n o seu* ***raio de convergência*** *é*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}} \tag{10.2}$$

onde $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$ designa o limite superior (o maior dos sublimites em $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$) da sucessão $\sqrt[n]{|a_n|}$, com as convenções $\frac{1}{0}=+\infty$ e $\frac{1}{+\infty}=0$. Portanto, $R\in[0,+\infty[\cup\{+\infty\}$.

Exemplo 10.4 *O raio de convergência da série dada no Exemplo **10.3** é $\dfrac{1}{3}$, porque para esta série $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\sqrt[n]{3^{n+\sqrt{n}}} = \lim 3^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = 3$.*

Teorema 10.2 *Considere-se a série de potências (10.1) de coeficientes a_n e centro z_0, e seja R o seu raio de convergência definido por (10.2).*

1. *A série é uniformemente convergente no circulo $\{z\in\mathbb{C}: |z-z_0|\leqslant r\}$, onde r é qualquer real positivo tal que $r<R$.*
2. *A série é divergente se $|z-z_0|>R$.*

Demonstração.

1. *Se $|z-z_0|\leqslant r<R$, então $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|\,r^n} = \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}r = \frac{1}{R}r<1$, concluindo-se pelo pelo critério de Cauchy (sobre séries de termos positivos) que a série $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|\,r^n$ é convergente. Então como $|a_n(z-z_0)^n|\leqslant|a_n|\,r^n$,obtemos pelo critério de Weierstrass (Teor. 10.1) a convergência uniforme da série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$ na região $|z-z_0|\leqslant r$.*
2. *Vamos mostrar o contra-recíproco: se a série de potências é convergente então $|z-z_0|\leqslant R$. De facto neste caso (convergência) temos $\lim a_n(z-z_0)^n=0$ (o termo geral da série é um infinitésimo) pelo que para n suficientemente grande $|a_n(z-z_0)^n|<1$ e portanto, $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|}\leqslant 1$.*
   Como $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}\,|z-z_0| = \frac{1}{R}|z-z_0|$, vem $\frac{|z-z_0|}{R}\leqslant 1$.

■

Recorde-se do curso de análise real o seguinte resultado:

Teorema 10.3 (Sobre sucessões reais positivas) *Seja u_n uma sucessão de reais positivos para a qual exista em $[0,+\infty[\cup\{+\infty\}$ o limite $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Então*

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Este resultado dá-nos um método útil para calcular o raio de convergência para certas séries de potências, através da fórmula $R=\lim\frac{|a_n|}{|a_n+1|}$ *no caso deste limite existir.* No entanto, por vezes é bem mais simples usar directamente a definição $R=\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$ e, por outro lado, facilmente se encontram exemplos (e. g. Exemplo **10.3**) para os quais não existe o limite $\lim\frac{|a_n|}{|a_n+1|}$ (existindo contudo, o raio de convergência dado por $R=\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$).