8 $^{\text{a}}$ Aula 2006.03.13 $\boxed{\textbf{AMIV}_{\text{LEC}}}$ **Apontamentos**

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

8.1 Integração de funções derivadas

O próximo resultado dá-nos, sob certas condições, um processo expedito para o cálculo de alguns destes integrais de variável complexa. É a extensão da fórmula de Barrow para funções de variável complexa, no entanto o problema da existência de primitivas é ainda mais intricado do que no caso real; este facto limita bastante a aplicabilidade deste resultado.

Proposição 8.1 *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um aberto, f analítica em D e $C \subset D$ uma curva seccionalmente regular com o ponto inicial z_0 e final z_1. Então*

$$\int_C f'(z)\ dz = f(z_1) - f(z_0)$$

Demonstração. *Seja $z(t)$ com $t \in [a,b]$ uma parametrização (seccionalmente regular) da curva orientada C. De acordo com a definição **4.1** f' é uma função contínua, pelo que (pela fórmula de Barrow para funções seccionalmente contínuas)*

$$\begin{aligned}
\int_C f'(z)\ dz &= \int_a^b f'(z(t))\ z'(t)\ dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt}\left[f(z(t))\right] dt \\
&= f(z(b)) - f(z(a)) \\
&= f(z_1) - f(z_0)
\end{aligned}$$

■

Exemplo 8.1 *Considere-se o integral considerado no Exemplo **7.6**. Como $\left(\frac{z^3}{3}\right)' = z^2$ temos*

$$\int_C z^2\, dz = \frac{i^3}{3} - 0 = \frac{-i}{3}.$$

Exemplo 8.2 *Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ uma curva seccionalmente regular com o ponto inicial ω_0 e final ω_1.Então*

$$\int_\Gamma \cos z\, dz = \operatorname{sen}\omega_1 - \operatorname{sen}\omega_0.$$

Exemplo 8.3 *Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ uma curva seccionalmente regular com o ponto inicial ω_0 e final ω_1.Então para $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$,*

$$\int_\Gamma z^n\, dz = \frac{\omega_1^{n+1}}{n+1} - \frac{\omega_0^{n+1}}{n+1},$$

se a curva Γ não passar pelo ponto $z = 0$, no caso de $n < -1$.

Exemplo 8.4 *Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ uma curva seccionalmente regular com o ponto inicial ω_0 e final ω_1.Então para $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$,*

$$\int_\Gamma (\xi - z)^n \, d\xi = \frac{(\omega_1 - z)^{n+1}}{n+1} - \frac{(\omega_0 - z)^{n+1}}{n+1},$$

se a curva Γ não passar pelo ponto $\xi = z$, no caso de $n < -1$.

Exemplo 8.5 *Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ uma curva seccionalmente regular com o ponto inicial ω_0 e final ω_1.Então, para um ramo do logaritmo tal que a sua linha de descontinuidade não passe pelo caminho que liga ω_0 a ω_1 (se tal for possível),*

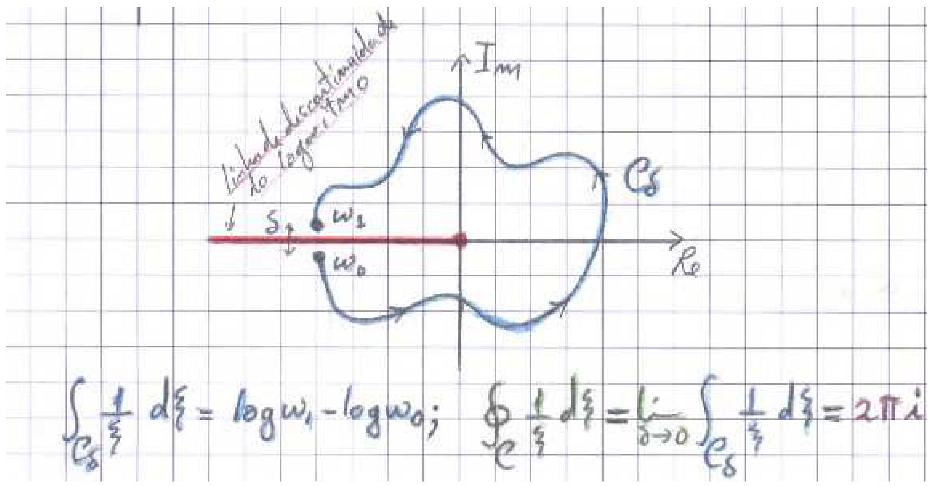
$$\int_\Gamma \frac{1}{\xi - z} \, d\xi = \log(\omega_1 - z) - \log(\omega_0 - z).$$

Exemplo 8.6 *Seja C uma curva simples fechada e seccionalmente regular que não passa sobre o ponto z.*

$$\oint_C \frac{1}{\xi - z} \, d\xi = 0 \qquad \text{se } C \text{ não envolve } z,$$

$$\oint_C \frac{1}{\xi - z} \, d\xi = i2\pi \qquad \text{se } C \text{ envolve } z \text{ no sentido directo.}$$

Este resultado obtém-se do exemplo anterior fazendo o limite $\omega_1 \to \omega_0$ (escolhendo um ramo do logaritmo adequado).



8.2 O Teorema de Cauchy

Notação 8.1 *Se C é uma curva fechada seccionalmente regular escreve-se $\oint_C f(z)\,dz$ com o mesmo significado de $\int_C f(z)\,dz$ apenas para reforçar a afirmação de que C é uma curva fechada.*

Teorema 8.2 *(de Cauchy)Seja $D \subset \mathbb{C}$ um aberto simplesmente conexo, f analítica em D e $C \subset D$ uma curva seccionalmente regular fechada. Então*

$$\oint_C f(z)\ dz = 0$$

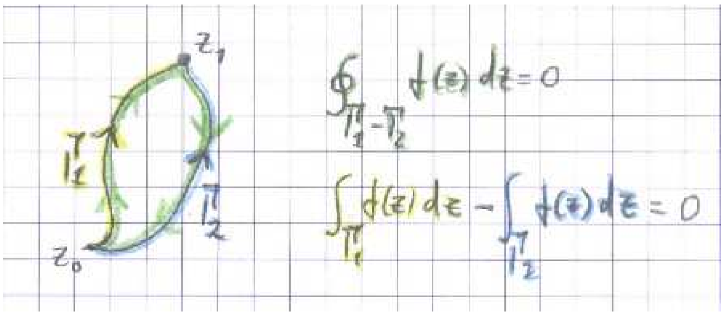
Demonstração. *De acordo com a relação $\int_C f(z)\ dz = \int_C (u, -v) \cdot d\mathbf{g} + i \int_C (v, u) \cdot d\mathbf{g}$, obtida na última aula, basta mostrar que os campos $(u, -v)$ e (v, u) são fechados (onde $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ e $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$). Ou seja $u, v \in C^1$ e*

$$\frac{\partial}{\partial y} u = \frac{\partial}{\partial x}(-v) \quad e \quad \frac{\partial}{\partial y} v = \frac{\partial}{\partial x} u,$$

que são exactamente as equações de Cauchy - Riemann. (note-se que u e v são de classe C^1 uma vez que pela nossa definição de função analítica $f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ é uma função contínua). ■

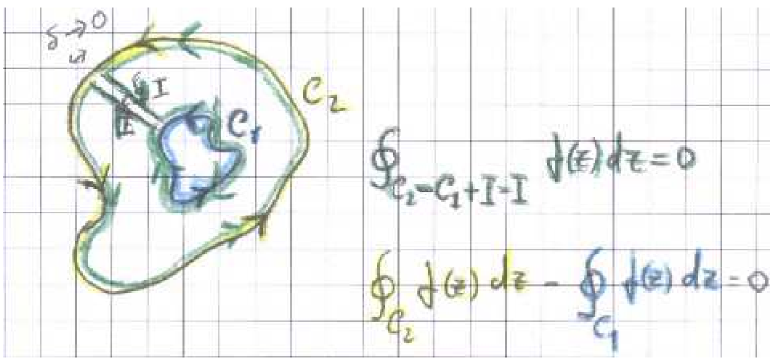
Corolário 8.3 *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um aberto simplesmente conexo, f analítica em D, Γ_1 e Γ_2 duas curvas seccionalmente regulares contidas em D com o mesmos pontos inicial z_0 e final z_1. Então*

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\ dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\ dz$$



Corolário 8.4 *Seja $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, analítica em D, e C_1 e C_2 duas curvas fechadas homotópicas em D [1](percorridas no mesmo sentido). Então*

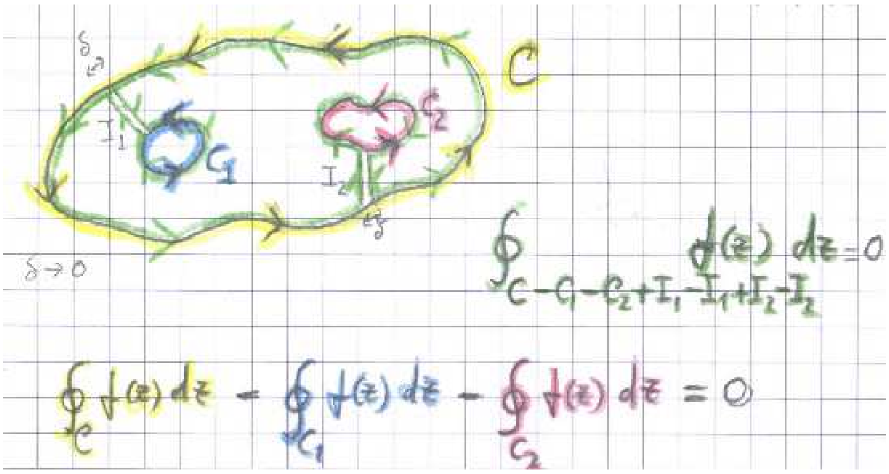
$$\oint_{C_1} f(z)\ dz = \oint_{C_2} f(z)\ dz$$



[1] Que podem, por deformação contínua, transformar-se uma na outra sem sair do conjunto D.

Corolário 8.5 *(Integrais de funções analíticas em regiões multiplamente conexas) Considere-se curvas seccionalmente regulares, fechadas e simples, C, C_1, C_2, ...e C_N, percorridas no sentido positivo, tais que C_1, C_2, ...e C_N estão contidas no interior da região delimitada pela curva C e as regiões limitadas por cada uma das curvas C_1, C_2, ...e C_N não se intersectam. Seja R o conjunto que se obtém da região delimitada por C retirando o interior de cada uma das regiões limitadas pelas curvas C_1, C_2, ...e C_N. Se f é uma função analítica em R, então*

$$\oint_C f(z)\, dz = \oint_{C_1} f(z)\, dz + \oint_{C_2} f(z)\, dz + \dots + \oint_{C_N} f(z)\, dz.$$



8.3 Fórmula integral de Cauchy

Exemplo 8.7 *Seja C uma curva fechada e simples, percorrida no sentido positivo e que envolve o ponto z. Então, de acordo com o Corolário 8.4 temos*

$$\oint_C \frac{1}{\xi - z}\, d\xi = \oint_{|\xi - z|=1} \frac{1}{\xi - z}\, d\xi$$

e pela definição (usando o caminho $\xi(t) = z + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$)

$$\begin{aligned}\oint_{|\xi - z|=1} \frac{1}{\xi - z}\, d\xi &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\xi(t) - z} \xi'(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it}\, dt \\ &= i \int_0^{2\pi} 1\, dt \\ &= i 2\pi\end{aligned}$$

Da mesma forma, para $n \neq 1$

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{1}{(\xi - z)^n}\, d\xi &= \oint_{|\xi - z|=1} \frac{1}{(\xi - z)^n}\, d\xi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\xi(t) - z)^n} \xi'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{int}} ie^{it}\, dt = i \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t}\, dt \\
&= i \left[\frac{e^{i(1-n)t}}{i(1-n)} \right]_0^{2\pi} = i \frac{e^{i(1-n)2\pi} - 1}{i(1-n)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Temos portanto o seguinte resultado:

$$\oint_C \frac{1}{\xi - z}\, d\xi = i2\pi$$

se C é uma curva fechada simples, percorrida no sentido positivo e que *envolve o ponto z*. Nestas mesmas condições, com f uma função analítica na região delimitada por C e para $\delta > 0$ pequeno, temos:

$$\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \oint_{|\xi - z|=\delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \simeq f(z) \oint_{|\xi - z|=\delta} \frac{1}{\xi - z}\, d\xi = i2\pi f(z).$$

Para tornar rigoroso este raciocínio devemos considerar a próxima proposição que envolve a seguinte definição:

Definição 8.2 *Seja $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ (com $a < b$) um caminho seccionalmente regular, $C = z([a, b])$ e φ uma função **real** de variável complexa definida e em C. Então sempre que o lado direito da seguinte expressão existir como um número real dizemos que φ é integrável sobre C e escrevemos*

$$\int_C \varphi(z)\, |dz| = \int_a^b \varphi(z(t))\, |z'(t)|\, dt$$

Observação 8.1 *Esta definição coincide com a definição de integral de linha de um campo escalar definido em $\mathbb{R}^2$, identificando naturalmente φ com um tal campo: $z = x + iy$, $\varphi(z) = \varphi(x, y)$,*

$$\int_a^b \varphi(z(t))\, |z'(t)|\, dt = \int_a^b \varphi(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

Portanto $\int_C 1\, |dz|$ = comprimento do arco C.

Proposição 8.6 *Seja $C \subset \mathbb{C}$, uma curva seccionalmente regular e f uma função complexa de variável complexa definida e integrável em C. Então*

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leqslant \int_C |f(z)|\, |dz|$$

Demonstração. *Usando uma parametrização (seccionalmente regular) $z(t)$ de C temos*

$$\begin{aligned}\left|\int_C f(z)\,dz\right| &= \left|\int_a^b f(z(t))\,|z'(t)|\,dt\right| \\ &\leqslant \int_a^b |f(z(t))|\,|z'(t)|\,dt = \int_C |f(z)|\,|dz|\end{aligned}$$

■

Teorema 8.7 (Fórmula integral de Cauchy) *Seja C uma curva seccionalmente regular, simples e fechada, percorrida no sentido positivo. Considere-se f uma função analítica na região delimitada pela curva C e $z \in \mathbb{C}$ um ponto interior a esta região. Então*

$$\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = i2\pi f(z).$$

Demonstração. *Seja $\delta > 0$, suficientemente pequeno tal que a circunferência $|\xi - z| = \delta$ esteja contida na região delimitada pela curva C.*

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi - i2\pi f(z) &= \oint_C \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\,d\xi \\ &= \oint_{|\xi - z| = \delta} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\,d\xi,\end{aligned}$$

onde se usou o Corolário 8.4 e portanto a hipótese de f ser analítica. Estimando o lado direito da igualdade acima temos:

Seja $\varepsilon > 0$ e tome-se $\delta > 0$ tal que (este δ existe porque f é continua)

$$|\xi - z| \leqslant \delta \Rightarrow |f(\xi) - f(z)| \leqslant \varepsilon$$

então

$$\begin{aligned}\left|\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi - i2\pi f(z)\right| &\leqslant \oint_{|\xi - z| = \delta} \left|\frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\right|\,|d\xi| \leqslant \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{\delta}\oint_{|\xi - z| = \delta} |d\xi| = \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{\delta} 2\pi\delta = \varepsilon 2\pi\end{aligned}$$

Fazendo ε tender para zero concluímos resultado pretendido. ■

Exemplo 8.8 *Sendo C a circunferência de raio unitário centrada na origem, temos pela fórmula integral de Cauhy*[2]

$$\oint_C \frac{z^2}{z - \frac{1}{2}}\,dz = i2\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{i\pi}{2},$$

uma vez que a função $f(z) = z^2$ é analítica e o ponto $z = \frac{1}{2}$ é interior ao círculo $|z| \leqslant 1$.

[2] Note-se que $\oint_C \frac{z^2}{z - \frac{1}{2}}\,dz = \oint_C \frac{\xi^2}{\xi - \frac{1}{2}}\,d\xi$.