7 ª Aula 2006.03.10 $\boxed{\textbf{AMIV}_{\text{LEC}}}$ **Apontamentos**

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

7.1 Funções complexas de variável real

Antes de introduzirmos o integral de funções complexas de *variável complexa*, vamos começar por estudar as funções complexas de *variável real* e a integração destas funções. Estas funções identificam-se exactamente e naturalmente com as funções com variável real e valores em $\mathbb{R}^2$. De facto dada uma função $F : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, esta corresponde à função vectorial $\mathbf{g} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$\mathbf{g}(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{onde} \quad x(t) = \operatorname{Re} F(t) \quad \text{e} \quad y(t) = \operatorname{Im} F(t).$$

Portanto o estudo da diferenciabilidade destas funções não difere do estudo feito em cadeiras de análise real. De facto temos

$$\begin{aligned} F'(t) &= \lim_{s\to 0} \frac{F(t+s) - F(t)}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{x(t+s) + iy(t+s) - (x(t) + iy(t))}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{x(t+s) - x(t)}{s} + i\frac{y(t+s) - y(t)}{s} \\ &= x'(t) + iy'(t), \end{aligned}$$

tal como

$$\begin{aligned} \mathbf{g}'(t) &= \lim_{s\to 0} \frac{\mathbf{g}(t+s) - \mathbf{g}(t)}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} \left(\frac{x(t+s) - x(t)}{s}, \frac{y(t+s) - y(t)}{s} \right) \\ &= (x'(t), y'(t)). \end{aligned}$$

Convém, contudo, estudar a diferenciabilidade da composição de funções de variável real com funções de variável complexa.

Com uma demonstração formalmente idêntica à do teorema da derivação da função composta para funções reais de variável real, obtemos a seguinte proposição:

Proposição 7.1 *Sejam $G : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, diferenciável; $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, analítica em D; tais que $G(I) \subset D$. Então $f \circ G$ é diferenciável em I e*

$$(f \circ G)'(t) = f'(G(t))\, G'(t).$$

Exemplo 7.1 *Temos* $\frac{d}{dt} e^{it} = ie^{it}$
($f(z) = e^z$ e $G(t) = it$).

Exemplo 7.2 *Temos* $\frac{d}{dt} \operatorname{sen}(|t|\; t + i\, t^2) = 2(|t| + i\, t) \cos(|t|\; t + i\, t^2)$
($f(z) = \operatorname{sen} z$ e $G(t) = |t|\; t + i\, t^2$).

7.2 Integração de funções complexas de variável real

7.2.1 Definição

Vamos agora definir o conceito de integral de funções complexas de *variável real* para mais à frente definir o integral de funções complexas de *variável complexa*.

Seja[1] $F : [a, b] \to \mathbb{C}$, tal que a sua parte real e a sua parte imaginária sejam funções reais de variável real integráveis [2] no intervalo $[a, b]$. Então F diz-se integrável em $[a, b]$ e define-se o integral de F em $[a, b]$ através da seguinte fórmula:

$$\int_a^b F(t)\ dt = \int_a^b \operatorname{Re} F(t)\ dt + i \int_a^b \operatorname{Im} F(t)\ dt.$$

Exemplo 7.3

$$\begin{aligned} \int_0^2 e^{it}\, dt &= \int_0^2 (\cos t + i \operatorname{sen} t)\ dt = \int_0^2 \cos t\, dt + i \int_0^2 \operatorname{sen} t\, dt \\ &= [\operatorname{sen} t]_0^2 + i\,[-\cos t]_0^2 = \operatorname{sen} 2 + i\,(-\cos 2 + 1)\,. \end{aligned}$$

7.2.2 Linearidade

Sejam α, β dois números complexos e as funções $F, G : [a, b] \to \mathbb{C}$ integráveis, então

$$\int_a^b (\alpha F(t) + \beta G(t))\ dt = \alpha \int_a^b F(t)\ dt + \beta \int_a^b G(t)\ dt.$$

De facto

$$\begin{aligned} \int_a^b (F(t) + G(t))\ dt &= \int_a^b \operatorname{Re}(F(t) + G(t))\ dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(F(t) + G(t))\ dt \\ &= \int_a^b (\operatorname{Re} F(t) + \operatorname{Re} G(t))\ dt + i \int_a^b (\operatorname{Im} F(t) + \operatorname{Im} G(t))\ dt \\ &= \int_a^b \operatorname{Re} F(t)\ dt + \int_a^b \operatorname{Re} G(t)\ dt + i \int_a^b \operatorname{Im} F(t)\ dt + i \int_a^b \operatorname{Im} G(t)\ dt \\ &= \int_a^b \operatorname{Re} F(t)\ dt + i \int_a^b \operatorname{Im} F(t)\ dt + \int_a^b \operatorname{Re} G(t)\ dt + i \int_a^b \operatorname{Im} G(t)\ dt \\ &= \int_a^b F(t)\ dt + \int_a^b G(t)\ dt. \end{aligned}$$

[1] Com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$.

[2] Neste curso, podemos considerar, indiferentemente, sempre o integral de Lebesgue ou sempre o de Riemann.

e

$$\begin{aligned}
\alpha \int_a^b F(t)\,dt &= (\operatorname{Re}\alpha + i \operatorname{Im}\alpha)\left(\int_a^b \operatorname{Re} F(t)\,dt + i\int_a^b \operatorname{Im} F(t)\,dt\right) \\
&= \operatorname{Re}\alpha \int_a^b \operatorname{Re} F(t)\,dt - \operatorname{Im}\alpha \int_a^b \operatorname{Im} F(t)\,dt + \\
&\qquad + i\left(\operatorname{Re}\alpha \int_a^b \operatorname{Im} F(t)\,dt + \operatorname{Im}\alpha \int_a^b \operatorname{Re} F(t)\,dt\right) \\
&= \int_a^b (\operatorname{Re}\alpha \operatorname{Re} F(t) - \operatorname{Im}\alpha \operatorname{Im} F(t))\,dt + \\
&\qquad + i\int_a^b (\operatorname{Re}\alpha \operatorname{Im} F(t) + \operatorname{Im}\alpha \operatorname{Re} F(t))\,dt \\
&= \int_a^b \operatorname{Re}(\alpha F(t))\,dt + i\int_a^b \operatorname{Im}(\alpha F(t))\,dt \\
&= \int_a^b \alpha F(t)\,dt.
\end{aligned}$$

7.2.3 Regra de Barrow

Sendo $F'(t)$ a derivada contínua em $[a,b]$ da função $F:[a,b]\to\mathbb{C}$, i. e. $F'(t) = \left(\frac{d}{dt}\operatorname{Re} F(t)\right) + i\left(\frac{d}{dt}\operatorname{Im} F(t)\right)$, sendo $\left(\frac{d}{dt}\operatorname{Re} F(t)\right)$ e $\left(\frac{d}{dt}\operatorname{Im} F(t)\right)$ funções reais de variável real contínuas. Então

$$\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

De facto

$$\begin{aligned}
\int_a^b F'(t)\,dt &= \int_a^b \frac{d}{dt}\operatorname{Re} F(t)\,dt + i\int_a^b \frac{d}{dt}\operatorname{Im} F(t)\,dt \\
&= \operatorname{Re} F(b) - \operatorname{Re} F(a) + i(\operatorname{Im} F(b) - \operatorname{Im} F(a)) \\
&= \operatorname{Re} F(b) + i\operatorname{Im} F(b) - \operatorname{Re} F(a) - i\operatorname{Im} F(a) \\
&= F(b) - F(a).
\end{aligned}$$

Exemplo 7.4

$$\int_0^2 e^{it}\,dt = \left[\frac{e^{it}}{i}\right]_0^2 = \frac{e^{i2}-1}{i} = \operatorname{sen} 2 + i(1-\cos 2)$$

7.2.4 Comparação de integrais

Proposição 7.2 *Seja $F:[a,b]\to\mathbb{C}$ integrável ($a<b$, números reais), então*

$$\left|\int_a^b F(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |F(t)|\,dt.$$

Note-se que $\int_a^b |F(t)|\ dt$ é o integral de uma função real de variável real.

Demonstração. Sejam $\rho > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$, tais que $\int_a^b F(t)\ dt = \rho\, e^{i\theta}$.

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b F(t)\ dt \right| &= \rho = \operatorname{Re} \rho \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{-i\theta} \int_a^b F(t)\ dt \right) = \operatorname{Re} \int_a^b e^{-i\theta} F(t)\ dt \\ &= \int_a^b \operatorname{Re} \left(e^{-i\theta} F(t) \right) dt, \end{aligned}$$

notando que $\operatorname{Re} z \leqslant |z|$, vem

$$\left| \int_a^b F(t)\ dt \right| \leqslant \int_a^b \left| e^{-i\theta} F(t) \right| dt.$$

Mas $\left| e^{-i\theta} F(t) \right| = \left| e^{-i\theta} \right| |F(t)|$ e $\left| e^{-i\theta} \right| = 1$, portanto

$$\left| \int_a^b F(t)\ dt \right| \leqslant \int_a^b |F(t)|\ dt.$$

■

Exemplo 7.5

$$\left| \int_0^2 e^{it}\, dt \right| \leqslant \int_0^2 \left| e^{it} \right| dt = \int_0^2 dt = 2.$$

De facto

$$\begin{aligned} \left| \int_0^2 e^{it}\, dt \right| &= |\operatorname{sen} 2 + i(1 - \cos 2)| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 2 + (1 - \cos 2)^2} \\ &= \sqrt{\operatorname{sen}^2 2 + \cos^2 2 + 1 - 2\cos 2} = \sqrt{2 - 2\cos 2} \\ &\leqslant \sqrt{4} = 2. \end{aligned}$$

7.3 Definição do Integral de funções complexas de variável complexa

Dado um caminho $\mathbf{g} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, temos duas funções coordenadas x e y, i. e. $\mathbf{g}(t) = (x(t), y(t))$. Podemos identificar este caminho com um caminho $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ definido por $z(t) = x(t) + iy(t)$. E vice-versa. Em particular para caminhos diferenciáveis temos $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ tal como $\mathbf{g}'(t) = (x'(t), y'(t))$. Isto é existe uma identificação total entre caminhos em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{C}$.

Recordemos alguns conceitos e definições conhecidos da cadeira de AMIII: curvas e caminhos no plano ($\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$) *regulares*; *seccionalmente regulares*; *simples*; *simples e fechadas*; *orientação de curvas*; *concatenação de curvas orientadas*. *Região delimitada por uma curva fechada* (como um conjunto compacto).

Diz-se que *uma curva fechada C envolve um ponto z*, se este estiver no interior da região delimitada por C.

Estamos agora em condições de introduzir a seguinte definição:

Definição 7.1 *Dado um caminho seccionalmente regular e simples $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ $(a < b)$, este define a curva $C = z([a, b])$ percorrida uma vez num certo sentido. Considere-se uma função complexa de variável complexa $f : C \to \mathbb{C}$ (para a qual exista em $\mathbb{C}$ o integral do lado direito da igualdade abaixo; por exemplo se f é continua em C). Então o integral de f ao longo do caminho z (ou da curva C no sentido considerado) é definido por*

$$\int_C f(z)\ dz = \int_a^b f(z(t))\ \frac{dz}{dt}(t)\ dt.$$

Nesta definição, e de acordo com a notação habitual, a letra z assume dois significados distintos: no integral do lado esquerdo é uma variável muda tal como a letra t o é no integral do lado direito; no integral do lado direito z é um caminho regular que representa uma curva C percorrida num certo sentido.

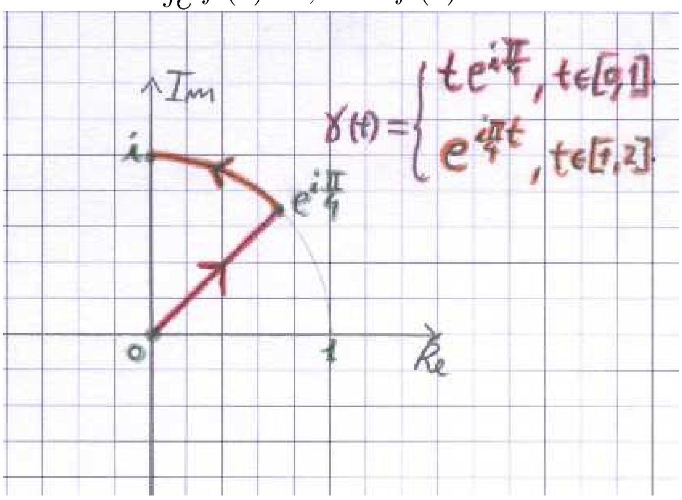
Este integral generaliza o integral de funções reais de variável real: se $z(t) = t$, com $t \in [a, b]$, i. e. $I = z([a, b])$ é um segmento de recta sobre o eixo real, então $z'(t) = 1$ e $\int_I f(z)\ dz = \int_a^b f(t)\ dt$.

Note-se também, que a derivada do caminho pode não estar definida num número finito de pontos. Contudo os limites laterais da derivada, $\frac{dz}{dt}(t-)$ e $\frac{dz}{dt}(t+)$, existem (com valores em $\mathbb{C}$) em toda a curva C e coincidem com as derivadas laterais (porque $z(t)$ é seccionalmente regular em $[a, b]$).

Exemplo 7.6 *Considere-se o caminho*

$$\gamma(t) = \begin{cases} e^{i\frac{\pi}{4}}t, & se\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ e^{i\frac{\pi}{4}t}, & se\ 1 \leqslant t \leqslant 2 \end{cases}$$

e $C = \gamma([0, 2])$. Vamos calcular $\int_C f(z)\ dz$, com $f(z) = z^2$.



Temos

$$\gamma'(t) = \begin{cases} e^{i\frac{\pi}{4}}, & se\ 0 < t < 1 \\ i\frac{\pi}{4}e^{i\frac{\pi}{4}t}, & se\ 1 < t < 2 \end{cases}.$$

Então de acordo com a definição de integral vem,

$$\begin{aligned}
\int_C z^2\,dz &= \int_0^2 \gamma^2(t)\,\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 \left(e^{i\frac{\pi}{4}}t\right)^2 e^{i\frac{\pi}{4}}\,dt + \int_1^2 \left(e^{i\frac{\pi}{4}t}\right)^2 i\frac{\pi}{4}e^{i\frac{\pi}{4}t}\,dt \\
&= \int_0^1 e^{i\frac{\pi}{2}}t^2 e^{i\frac{\pi}{4}}\,dt + i\frac{\pi}{4}\int_1^2 e^{i\frac{\pi}{2}t}e^{i\frac{\pi}{4}t}\,dt = e^{i\frac{3\pi}{4}}\int_0^1 t^2\,dt + i\frac{\pi}{4}\int_1^2 e^{i\frac{3\pi}{4}t}\,dt \\
&= e^{i\frac{3\pi}{4}}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + i\frac{\pi}{4}\left[\frac{4}{3\pi i}e^{i\frac{3\pi}{4}t}\right]_1^2 = \frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}}{3} + \frac{1}{3}\left(e^{i\frac{3\pi}{2}} - e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) \\
&= \frac{1}{3}e^{i\frac{3\pi}{2}t} = -\frac{i}{3}.
\end{aligned}$$

Mas a um caminho $z(t) = x(t) + iy(t)$ no plano complexo corresponde um caminho $\mathbf{g} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, no plano real, definido por $\mathbf{g}(t) = (x(t), y(t))$. Temos então (onde $\cdot$ designa o produto interno em $\mathbb{R}^2$), de forma abreviada[3]:

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\,dz &= \int_C (u+iv)\,(dx+idy) = \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (u\,dy - v\,dx) \\
&= \int_C (u,-v)\cdot d\mathbf{g} + i\int_C (v,u)\cdot d\mathbf{g}.
\end{aligned}$$

onde $\int_C (u,-v)\cdot d\mathbf{g}$ e $\int_C (v,u)\cdot d\mathbf{g}$ são respectivamente, os integrais de linha dos campos[4] $(u,-v)$ e (v,u) ao longo do caminho $\mathbf{g}$ (em $\mathbb{R}^2$).

Esta igualdade permite-nos deduzir propriedades dos integrais de funções complexas de variável complexa $\int_C f(z)\,dz$ das propriedades correspondentes dos integrais de linha de campos vectoriais. Em particular temos $\int_C f(z)\,dz = -\int_{-C} f(z)\,dz$ (onde $-C$ representa a curva C percorrida no sentido contrário) e $\left|\int_C f(z)\,dz\right|$ é independente do caminho simples (e seccionalmente regular) que percorre C.

Se C é a concatenação de duas curvas regulares C_1 e C_2, i.e. $C = C_1 + C_2$, tem–se

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

De forma análoga para o integral ao longo de curvas que são a concatenação de n curvas regulares.

---

[3] Ou de forma menos abreviada

$$\begin{aligned}
&\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,\frac{dz}{dt}(t)\,dt = \int_a^b \left(u(x(t),y(t)) + i\,v(x(t),y(t))\right)\left(x'(t) + i\,y'(t)\right)\,dt \\
&= \int_a^b \left(u(x(t),y(t))\,x'(t) - v(x(t),y(t))\,y'(t)\right)\,dt + i\int_a^b \left(u(x(t),y(t))\,y'(t) + v(x(t),y(t))\,x'(t)\right)\,dt \\
&= \int_a^b (u(x(t),y(t)), -v(x(t),y(t)))\cdot(x'(t),y'(t))\,dt + i\int_a^b (v(x(t),y(t)), u(x(t),y(t)))\cdot(x'(t),y'(t))\,dt \\
&= \int_a^b (u(\mathbf{g}(t)), -v(\mathbf{g}(t)))\cdot\mathbf{g}'(t)\,dt + i\int_a^b (v(\mathbf{g}(t)), u(\mathbf{g}(t)))\cdot\mathbf{g}'(t)\,dt \\
&= \int_C (u,-v)\cdot d\mathbf{g} + i\int_C (v,u)\cdot d\mathbf{g}
\end{aligned}$$

[4] Funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$.