4 ª Aula 2006.03.03 AMIV LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

4.1 Combinação de funções diferenciáveis

Relembremos da última aula a definição de diferenciabilidade no sentido complexo: uma função $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é diferenciável (no sentido complexo) no ponto z interior ao domínio D sse existir (em $\mathbb{C}$) o seguinte limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Soma, produto, divisão (supondo a divisão bem definida), composição de funções diferenciáveis é diferenciável. As demonstrações são formalmente idênticas às demonstrações dos resultados correspondentes para funções reais de variável real. Vamos listar estes resultados:

Se $f(z)$ é diferenciável no ponto z_0 e α é uma constante complexa, então o produto αf é uma função diferenciável e

$$(\alpha f)'(z_0) = \alpha f'(z_0).$$

Se $f(z)$ e $g(z)$ são diferenciáveis no ponto z_0, então a soma $f+g$ é uma função diferenciável e

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0).$$

Se $f(z)$ e $g(z)$ são diferenciáveis no ponto z_0, então o produto fg é uma função diferenciável e

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)\, g(z_0) + f(z_0)\, g'(z_0).$$

Se $f(z)$ e $g(z)$ são diferenciáveis no ponto z_0, e $g(z_0) \neq 0$, então o quociente $\dfrac{f}{g}$ é uma função diferenciável e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)\, g(z_0) - f(z_0)\, g'(z_0)}{g^2(z_0)}.$$

Se $g(z)$ é diferenciável no ponto z_0 e $f(z)$ é diferenciável no ponto $g(z_0)$, então a função composta $f \circ g$ é diferenciável no ponto z_0 e

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))\; g'(z_0).$$

Exemplo 4.1 *Se $F(z) = f(z^2)$ e f é diferenciável em $\mathbb{C}$, então $F(z)$ é diferenciável e $F'(z) = 2zf'(z^2)$.*

Se $G(z) = (g(z))^2$ e g é diferenciável em $\mathbb{C}$, então $G(z)$ é diferenciável e $G'(z) = 2g(z)\, g'(z)$.

Pelos enunciados acima expostos facilmente se conclui que qualquer polinómio em z (com coeficientes complexos) é uma função diferenciável em $\mathbb{C}$. Tal como qualquer função racional $\frac{P(z)}{Q(z)}$ (quociente entre dois polinómios) é uma função diferenciável em todo o seu domínio (todo plano complexo excepto os zeros do denominador; $\{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\}$).

Exemplo 4.2 $f(z) = \frac{z^9+(3+i5)z^5+\pi z^3+i\sqrt{2}z^2+2}{4+z^2}$ *é uma função diferenciável em* $\mathbb{C}\setminus\{-2i, 2i\}$.

Contudo existem muitas funções formalmente simples que não são diferenciáveis no sentido complexo, como se mostrou com o exemplo $f(z) = \overline{z}$.

4.2 Equações de Cauchy-Riemann. Condições necessárias para a diferenciabilidade

Se f é diferenciável num certo ponto z_0 então existe o limite

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

Note-se que $h \in \mathbb{C}$ e portanto $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ converge para $f'(z_0)$ independentemente da forma com que h converge para 0; isto é independentemente do percurso que h toma quando converge para 0. Em particular os limites direccionais têm de iguais segundo todas as direcções. Portanto, o valor $f'(z_0)$ pode ser calculado fazendo h tender para zero segundo o eixo real (direcção horizontal), ou segundo o eixo imaginário (direcção vertical), obtendo-se o mesmo resultado (na hipótese da existência da derivada $f'(z_0)$). Então (com $x_0 = \operatorname{Re} z_0$ e $y_0 = \operatorname{Im} z_0$) se f é diferenciável em z_0,

1. $$f'(z_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t+iy_0) - f(x_0+iy_0)}{t}$$

2. $$f'(z_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+i(y_0+t)) - f(x_0+iy_0)}{it}$$

onde t é uma variável real (muda). Separando a parte real e a parte imaginária obtemos (com $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$ e $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$):

1. $$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{u(x_0+t,y_0) + iv(x_0+t,y_0) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{u(x_0+t,y_0) - u(x_0,y_0)}{t} + i\lim_{t\to 0} \frac{v(x_0+t,y_0) - v(x_0,y_0)}{t} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{aligned}$$

2. Analogamente

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{u(x_0,y_0+t) + iv(x_0,y_0+t) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0)}{it} \\ &= \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \end{aligned}$$

Conclusão: se $f = u + iv$ é diferenciável no ponto $z = x_0 + iy_0$, então

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Estas são designadas por **equações de Cauchy-Riemann**.

Mostrámos então o seguinte Teorema.

Teorema 4.1 *Se $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ é uma função diferenciável (no sentido complexo) no ponto $z_0 = x_0 + iy_0$, então as funções $u(x,y)$ e $v(x,y)$ satisfazem as equações de Cauchy- Riemann no ponto (x_0, y_0).*

Exemplo 4.3 *Vamos confirmar que a função $f(z) = \overline{z}$ não é diferenciável:*
$f(x+iy) = u + iv$, com $u = x$ e $v = -y$; $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}$; as equações de Cauhy-Riemann não são satisfeitas (apesar de $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$).

Observação 4.1 *De acordo com as equações de Cauhy- Riemann, no caso de existir (esta é uma hipótese muito forte) a derivada de uma função complexa de variável complexa poder ser calculada, a partir das suas partes reais e imaginárias, usando qualquer das seguintes fórmulas:*

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad f' = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad f' = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \ \text{ou} \qquad f' = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

4.3 Condições suficientes para a diferenciabilidade.

Teorema 4.2 *Seja $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, u a parte real, v a parte imaginária de f e $z_0 = x_0 + iy_0$ ($x_0 = \operatorname{Re} z_0$ e $y_0 = \operatorname{Im} z_0$) um ponto interior a D.*

Se $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ é tal que u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em (x_0, y_0) e as suas derivadas parciais são funções contínuas neste mesmo ponto (x_0, y_0), então f é diferenciável no ponto $z_0 = x_0 + iy_0$.

Observação 4.2 *Vamos utilizar apenas o facto de u e v serem diferenciáveis em (x_0, y_0), o que é consequência de terem derivadas parciais contínuas neste ponto; de acordo com um teorema bem conhecido da análise em $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. $h = t + ik$, $t = \operatorname{Re} h$ e $k = \operatorname{Im} h$; $|h| = \sqrt{t^2 + k^2} = \|(t,k)\|$

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} &= \frac{1}{h}\left[u(x_0+t, y_0+k) + iv(x_0+t, y_0+k) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)\right] \\ &= \frac{1}{h}\left[u(x_0+t, y_0+k) - u(x_0, y_0) + i\left(v(x_0+t, y_0+k) - v(x_0, y_0)\right)\right]\end{aligned}$$

usando a diferenciabilidade de u e v no ponto (x_0, y_0), vem[1]

$$\begin{aligned}
\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\,t+\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\,k+\circ(|h|)\right)+\\
&\quad +\frac{1}{h}i\left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\,t+\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\,k+\circ(|h|)\right)\\
&= \frac{1}{h}\left[t\frac{\partial u}{\partial x}+k\frac{\partial u}{\partial y}+i\left(t\frac{\partial v}{\partial x}+k\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\circ(|h|)\right]
\end{aligned}$$

omitindo o ponto (x_0, y_0) onde todas as derivadas parciais são calculadas. Utilizando as equações de Cauchy-Riemann , obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} &= \frac{1}{h}\left[t\frac{\partial u}{\partial x}-k\frac{\partial v}{\partial x}+i\left(t\frac{\partial v}{\partial x}+k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\circ(|h|)\right]\\
&= \frac{1}{h}\left[(t+ik)\frac{\partial u}{\partial x}+(-k+it)\frac{\partial v}{\partial x}+\circ(|h|)\right]\\
&= \frac{1}{h}\left[(t+ik)\frac{\partial u}{\partial x}+i(ik+t)\frac{\partial v}{\partial x}+\circ(|h|)\right]\\
&= \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\circ(|h|)}{h}.
\end{aligned}$$

O termo $\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$ não depende de h e $\frac{\circ(|h|)}{h}=\frac{\circ(|h|)}{|h|}\frac{|h|}{h}$ converge para zero (quando $h\to 0$) porque $\left|\frac{|h|}{h}\right|=1$. Pelo que existe o limite $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$. ■

Exemplo 4.4 *A função exponencial e^z é diferenciável em todo o plano complexo. Temos $e^z=u+iv$, com $u=e^x\cos y$ e $v=e^x\operatorname{sen} y$;*

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y=\frac{\partial v}{\partial y}\quad e\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\operatorname{sen} y=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Portanto as equações de Cauchy -Riemann são satisfeitas e as derivadas parciais de u e v são continuas, concluindo-se que e^z é diferenciável em todo o plano complexo e

$$\begin{aligned}
(e^z)' &= \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\\
&= e^x\cos y+ie^x\operatorname{sen} y\\
&= e^z.
\end{aligned}$$

Exercício 4.1 *Mostre que se a derivada de uma função de variável complexa é nula num conjunto aberto, então a função é constante nesse conjunto.*

[1] $\circ(|h|)$ designa uma função desconhecida g (neste caso g depende de z_0 e de h) que satisfaz a seguinte propriedade

$$\lim_{|h|\to 0}\frac{g}{|h|}=0.$$

4.4 Funções analíticas.

Observação 4.3 *Comparem-se os Teoremas 4.1 e 4.2. Estes resultados não são exactamente o recíproco um do outro. Contudo, é possível demonstrar que $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ é diferenciável num aberto D sse u e v satisfazem as equações de Cauchy -Riemann e são de classe C^1 nesse mesmo aberto (identificando naturalmente os subconjuntos $\mathbb{C}$ e de $\mathbb{R}^2$).*

Definição 4.1 *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $f : D \to \mathbb{C}$ é* ***holomorfa*** *(ou* ***analítica*** [2]*) sse for diferenciável em todos os pontos de D e sua derivada f' for contínua em D* [3]*.*

Consequência imediata desta definição e dos Teoremas 4.1 e 4.2 é que: $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ é analítica num aberto D sse u e v satisfazem as equações de Cauchy -Riemann e são de classe C^1. De facto se $f : D \to \mathbb{C}$ é diferenciável, então

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y},$$

pelo que, se a derivada f' for contínua, u e v são de classe C^1.

Definição 4.2 *Uma função $f : D \to \mathbb{C}$ é* ***holomorfa*** *(ou* ***analítica)*** *em $F \subset D$ sse existe um conjunto aberto A tal que $F \subset A$ e $f : A \to \mathbb{C}$ é analítica. (mais precisamente, se a restrição de f a $A \cap D$ admite uma extensão a A que seja analítica no sentido da definição 4.1)*

Definição 4.3 *Uma função $f : D \to \mathbb{C}$ é* ***holomorfa*** *(ou* ***analítica)*** *em $z \in D$ se é analítica em $\{z\}$ de acordo com a definição 4.2.*

Imediatamente se reconhece que, de acordo com os resultados semelhantes para funções contínuas e pontualmente diferenciáveis, a soma, o produto, o quociente e a composição de funções analíticas é ainda uma função analítica no interior do seu domínio. Esta observação permite reconhecer funções analíticas sem necessidade de efectuar cálculos.

Assim reconhecemos que qualquer polinómio é uma função[4] analítica em $\mathbb{C}$. Do mesmo modo qualquer função racional (quociente de polinómios) é analítica no seu domínio (o plano complexo excepto os zeros do denominador). Por outro lado, pelo Exemplo 4.4, a função exponencial é também analítica em todo plano complexo. Com base nestas funções é possível construir uma miríade de funções analíticas.

---

[2] Alguns autores definem de forma distinta as funções holomorfas (definições semelhantes à aqui enunciada) e as funções analíticas (definições ligadas ao desenvolvimento em séries de potências). Contudo à posteriori mostram que as funções são holomorfas sse são analíticas.

[3] Usualmente definem-se as funções holomorfas (ou as analíticas) sem pedir a continuidade da derivada da função, mostrando-se à posteriori que qualquer função holomorfa (analítica) tem derivada contínua. Esta abordagem usual implica uma teoria mais elaborada do que a que expomos neste curso. Aquilo que se perde é apenas que neste curso não se mostra que a definição usual é equivalente à aqui utilizada.

[4] As funções analíticas em todo plano complexo designam-se por **funções inteiras**.

Exemplo 4.5 *A função $f(z) = e^{\frac{z^2+1}{z-3i}}$ é analítica em $\mathbb{C}\setminus\{3i\}$. De facto, a função $z \to \frac{z^2+1}{z-3i}$ é analítica em $\mathbb{C}\setminus\{3i\}$, porque é uma função racional, e $f(z)$ é a composição desta função com a função exponencial; portanto a composição de funções analíticas. A sua derivada calcula-se de acordo com as regras mencionadas:*

$$f'(z) = e^{\frac{z^2+1}{z-3i}} \left(\frac{z^2+1}{z-3i}\right)' = e^{\frac{z^2+1}{z-3i}} \frac{2z(z-3i)-(z^2+1)}{(z-3i)^2} = \frac{z^2-6iz-1}{(z-3i)^2} e^{\frac{z^2+1}{z-3i}}$$

Exemplo 4.6 *As funções $\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ e $\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ são analíticas (soma e composição de funções analíticas). De acordo com as fórmulas de Euler, quando restringidas ao eixo real estas funções coincidem com as funções coseno e seno, respectivamente. Pelo que é natural definir*

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \quad e \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

O calculo da derivada destas (novas) funções definidas em todo plano complexo obtém-se pela regra da derivação da soma e da composição de funções:

$$\begin{aligned}
(\cos z)' &= \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)' = \frac{(e^{iz})'+(e^{-iz})'}{2} = \frac{ie^{iz}+(-i)e^{-iz}}{2} \\
&= i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2} = -\frac{1}{i}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2} = -\operatorname{sen} z.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\operatorname{sen} z)' &= \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)' = \frac{(e^{iz})'-(e^{-iz})'}{2i} = \frac{ie^{iz}-(-i)e^{-iz}}{2i} \\
&= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z.
\end{aligned}$$

Exemplo 4.7 *A analiticidade da função $f(z) = |z^2-\overline{z}^2| + i(z^2+\overline{z}^2)$ já não pode ser estudada do mesmo modo uma vez que a função $z \to \overline{z}$ não é analítica. Mas, com $z = x+iy$, vem $z^2 = x^2-y^2+2ixy$ e, portanto,*

$$f(x+iy) = |4ixy| + i2\left(x^2-y^2\right) = 4|xy| + i2\left(x^2-y^2\right).$$

Designando por u e v as partes real e imaginária de f, respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= 4\tfrac{|xy|}{x} \quad se\ x \neq 0 \quad e \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -4y, \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= 4\tfrac{|xy|}{y} \quad se\ y \neq 0 \quad e \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = -4x.
\end{aligned}$$

Pelo que as equações de Cauchy Riemann não são verificadas para $xy > 0$; mas são satisfeitas na região definida por $xy < 0$ e as derivadas parciais de u e v são contínuas nesta região aberta. Concluímos , portanto que a função deste exemplo é analítica no aberto: $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \operatorname{Re} z < 0\}$.