3 ª Aula 2006.02.24 AMIV LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

3.1 Noção de convergência no plano complexo.

Dada uma sucessão de números complexos z_n dizemos que z_n converge para o número complexo w se

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - w| = 0$$

e neste caso escrevemos $w = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ ou $z_n \to w$.

Uma vez que $|z_n - w|$ é a distância entre os pontos z_n e w, a convergência de números complexos é equivalente à convergência de pontos no plano. Ou seja a topologia de $\mathbb{C}$ é equivalente à topologia em $\mathbb{R}^2$. Em particular uma sucessão z_n é convergente sse a sua parte real e sua parte imaginária formarem sucessões (reais) convergentes.

Exemplo 3.1 $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + i\frac{n}{2n+1} \to w = e + i\frac{1}{2}$.

Podemos também considerar séries de números complexos:

Dada a sucessão $u_n \in \mathbb{C}$, defina-se a sucessão (de somas parciais)

$$z_N = \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

Dizemos que a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge se a sucessão de somas parciais z_N for convergente e neste caso $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim\limits_{N\to+\infty} z_N$.

Ainda no mesmo contexto, defina-se $a_n = \mathrm{Re}\,(u_n)$ e $b_n = \mathrm{Im}\,(u_n)$. Então temos

$$z_N = \sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N} a_n + i\sum_{n=0}^{N} b_n.$$

Pelo que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge sse as séries reais $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ convergirem simultaneamente e neste caso

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i\sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Proposição 3.1 *Dada uma sucessão $u_n \in \mathbb{C}$ tal que a série (real de termos não negativos) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ é convergente, então a série (complexa) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ é convergente.*

Ou seja, para que uma série seja convergente é suficiente a convergência da série dos módulos.

Demonstração. *Seja $a_n = \mathrm{Re}(u_n)$ e $b_n = \mathrm{Im}(u_n)$. Temos*

$$|a_n| \leqslant |u_n| \quad e \quad |b_n| \leqslant |u_n|,$$

donde, pelo critério da comparação, as séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \quad e \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|,$$

são convergentes. Concluímos que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ são (absolutamente) convergentes e portanto $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ é convergente. ∎

3.2 Função exponencial

Definição 3.1

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + ...$$

Com a função exponencial assim definida estendemos naturalmente a todo o plano complexo a função exponencial real de variável real já nossa conhecida dos cursos de cálculo elementar. Note-se que $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{1}{n!} z^n\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |z|^n = e^{|z|}$, pelo que a série que define e^z é sempre convergente.

Proposição 3.2 *De acordo com definição 3.1 temos*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Demonstração. *De acordo com definição 3.1 temos*

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\theta)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \theta^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n}}{(2n)!} \theta^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i^2)^n}{(2n)!} \theta^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i\,(i^2)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} \\ &= \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

∎

Consequentemente temos agora uma justificação mais profunda para a relação $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ e uma significação mais transcendente das fórmulas de Euler.

Com uma demonstração formalmente igual à que é conhecida para a função exponencial real de variável real, pode-se mostrar que [1]:

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}.$$

Temos então

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy} = e^x e^{iy} \\ &= e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y. \end{aligned}$$

3.3 Parte real e parte imaginária.

Tendo identificado os números complexos com os pontos do plano, facilmente se reconhece que através da mesma identificação, as funções complexas de variável complexa correspondem a funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

Seja

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

(ou $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; i. e. podemos considerar funções que estão apenas definidas em subconjuntos do plano complexo). Define-se **parte real** de f por

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$$

e **parte imaginária** de f por

$$v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy),$$

obtendo-se

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

(onde $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$). Estas funções, $u(x, y)$ e $v(x, y)$, são funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$. O campo (u, v):

$$(x, y) \to (u(x, y), v(x, y))$$

é uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$; pode ser identificado com a função f.

---

[1]

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z_1 + z_2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} z_1^{n-k} z_2^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} z_1^{n-k} \frac{1}{k!} z_2^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z_1^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z_2^n \end{aligned}$$

Exemplo 3.2 *A parte real e parte imaginária de* $e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$ *são, respectivamente,*

$$u(x,y) = e^x \cos y \quad e \quad v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y.$$

Exemplo 3.3 *Parte real e parte imaginária de* z^3*:*

$$\begin{aligned} z^3 &= (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2 iy + 3x(iy)^2 + (iy)^3 \\ &= x^3 - 3xy^2 + i\left(3x^2 y - y^3\right), \end{aligned}$$

portanto a parte real e parte imaginária de z^3 *são, respectivamente, as funções*

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 \quad e \quad v(x,y) = 3x^2 y - y^3.$$

3.4 Continuidade

De acordo com a identificação entre o plano complexo e $\mathbb{R}^2$, a noção de limite e continuidade para funções complexas de variável complexa é a mesma da para funções reais do plano no plano. Em particular, a título de listagem, temos:

Dizemos que w é o limite de $f(z)$ quando z tende para z_0, $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w$, se para todo z no domínio de f se tem

$$\forall \delta > 0 \quad \exists \varepsilon > 0 : \quad |z - z_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(z) - w| < \delta.$$

Se $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w$ e α é uma constante complexa, então $\lim\limits_{z\to z_0} \alpha f(z) = \alpha w$.

Se $\lim\limits_{z\to z_0} f_1(z) = w_1$ e $\lim\limits_{z\to z_0} f_2(z) = w_2$, então $\lim\limits_{z\to z_0} (f_1 + f_2)(z) = w_1 + w_2$.

Se $\lim\limits_{z\to z_0} f_1(z) = w_1$ e $\lim\limits_{z\to z_0} f_2(z) = w_2$, então $\lim\limits_{z\to z_0} (f_1 f_2)(z) = w_1 w_2$.

Se $\lim\limits_{z\to z_0} f_1(z) = w_1$ e $\lim\limits_{z\to z_0} f_2(z) = w_2 \neq 0$, então $\lim\limits_{z\to z_0} \left(\dfrac{f_1}{f_2}\right)(z) = \dfrac{w_1}{w_2}$.

Se $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = z_1$ e $\lim\limits_{z\to z_1} f(z) = w$, então $\lim\limits_{z\to z_0} (f \circ g)(z) = w$.

Uma função $f(z)$ é contínua em z_0 se $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Uma função $f(z)$ é contínua em $z = x + iy$ sse a sua parte real $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$ e a sua parte imaginária $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$ forem contínuas em (x,y).

A demonstração das propriedades dos limites e da continuidade de funções, pode-se fazer tanto de forma análoga aos resultados correspondentes para funções reais de variável real, como fazendo a separação das partes reais e imaginárias e utilizando os resultados de continuidade das funções definidas em $\mathbb{R}^2$. Por exemplo, vamos mostrar (de forma muito abreviada) que "Se $\lim\limits_{z\to z_0} f_1(z) = w_1 = f_1(z_0)$ e $\lim\limits_{z\to z_0} f_2(z) = w_2 = f_2(z_0)$, então $\lim\limits_{z\to z_0} (f_1 f_2)(z) = w_1 w_2 = (f_1 f_2)(z_0)$" (i.e. o produto de funções contínuas é uma função contínua).

Demonstração 1:

$$\begin{aligned} |f_1 f_2 - w_1 w_2| &= |f_1 f_2 - f_1 w_2 + f_1 w_2 - w_1 w_2| \\ &\leqslant |f_1| \, |f_2 - w_2| + |f_1 - w_1| \, |w_2| \end{aligned}$$

se $|f_2 - w_2| \to 0$ e $|f_1 - w_1| \to 0$ então $|f_1 f_2 - w_1 w_2| \to 0$.

Demonstração 2:

$$\begin{aligned} f_1 f_2 &= (u_1 + i v_1)(u_2 + i v_2) \\ &= u_1 u_2 - v_1 v_2 + i (u_1 v_2 + v_1 u_2) \end{aligned}$$

se f_1 e f_2 são contínuas então u_1, v_1, u_2 e v_2 são contínuas, então $u_1 u_2 - v_1 v_2$ e $u_1 v_2 + v_1 u_2$ são contínuas, então $f_1 f_2$ é contínua.

A identificação das funções complexas de variável complexa com funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ permite-nos reduzir o estudo da continuidade das primeiras aos resultados conhecidos para as segundas. Observação semelhante não se aplica, contudo, no estudo da diferenciabilidade.

3.5 Definição de diferenciabilidade.

De forma análoga ao que se faz em análise real vamos adoptar a seguinte definição.

Definição 3.2 *Uma função $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é* diferenciável (no sentido complexo) *no ponto z interior ao domínio D sse existir (em $\mathbb{C}$) o seguinte limite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Se f é diferenciável (no sentido complexo) no ponto z, então designa-se o número complexo

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

por derivada de f no ponto z.

Exemplo 3.4 *$z \to z$ é uma função diferenciável.*

$$\begin{aligned} (z)' &= \lim_{h \to 0} \frac{z + h - z}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Exemplo 3.5 *$z \to z^2$ é uma função diferenciável. Esta conclusão é imediata do exemplo anterior e do facto de o produto de duas funções diferenciáveis ser diferenciável. Mas, como exercício, vamos fazer uma verificação directa*

$$\begin{aligned} \left(z^2\right)' &= \lim_{h \to 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{z^2 + 2zh + h^2 - z^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (2z + h) \\ &= 2z. \end{aligned}$$

Exemplo 3.6 *Uma função constante é uma função diferenciável;*

$$f(z) = const. \Rightarrow f'(z) = 0.$$

No próximo exemplo vamos mostrar que esta definição de diferenciabilidade em $\mathbb{C}$ não é equivalente à definição que conhecemos em $\mathbb{R}^2$. Em particular funções muito simples de descrever no plano complexo podem não ser diferenciáveis apesar da suas partes reais e imaginárias serem regulares.

Exemplo 3.7 $z \to \overline{z}$ *não é uma função diferenciável. Ou dito de outra forma,* a conjugação complexa não é uma operação diferenciável.

Seja $f(z) = \overline{z}$ *e considere-se a razão incremental*

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{\overline{z+h} - \overline{z}}{h} \\ &= \frac{\overline{z} + \overline{h} - \overline{z}}{h} \\ &= \frac{\overline{h}}{h}.\end{aligned}$$

Escrevendo h *na forma polar* $h = \rho e^{i\theta}$, *observamos que fazer* h *tender para zero (aproximar-se da origem; trata-se de um limite no plano) é fazer* ρ *tender para zero (independentemente da coordenada* θ*), mas*

$$\begin{aligned}\frac{\overline{h}}{h} &= \frac{\rho\overline{e^{i\theta}}}{\rho e^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta}} \\ &= e^{-i2\theta}.\end{aligned}$$

Esta expressão mostra imediatamente que o limite $\lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}}{h}$ *não existe, porque a função* $\frac{\overline{h}}{h}$ *tem limites direccionais são distintos. De facto se fizermos* h *tender para zero ao longo da direcção horizontal* ($\theta = 0$) *obtemos o resultado* 1 *e se fizermos* h *tender para zero ao longo da direcção vertical* ($\theta = \frac{\pi}{2}$) *obtemos o resultado* -1.

Note-se que a função (correspondente) $(x, y) \to (x, -y)$ *é linear e portanto diferenciável enquanto função de* $\mathbb{R}^2$ *em* $\mathbb{R}^2$. *Mostra este exemplo que a noção de diferenciabilidade no sentido complexo é mais restritiva do que a noção de diferenciabilidade real das funções de* $\mathbb{R}^2$ *em* $\mathbb{R}^2$.

Comparando esta nova definição (em $\mathbb{C}$) com a definição de diferenciabilidade em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{R}^2$ observamos que em qualquer dos três casos a definição de diferenciabilidade corresponde à "boa " aproximação por funções lineares:

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)\,h + \circ(h)$$

onde $\circ(h)$ é um termo que dividido pelo módulo (ou norma) de h tende para zero quando h tende para zero. A diferença está na interpretação do termo linear $f'(z)\,h$ (produto de complexos, produto de reais ou produto de uma matriz por um vector [2]).

[2] Correspondendo respectivamente a uma aplicação linear no espaço vectorial unidimensional de corpo complexo $\mathbb{C}$; no espaço vectorial unidimensional de corpo real $\mathbb{R}$; e no espaço vectorial bidimensional de corpo real $\mathbb{R}^2$.