2 ª Aula 2006.02.22 AMIV LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

2.1 Representação polar dos números complexos

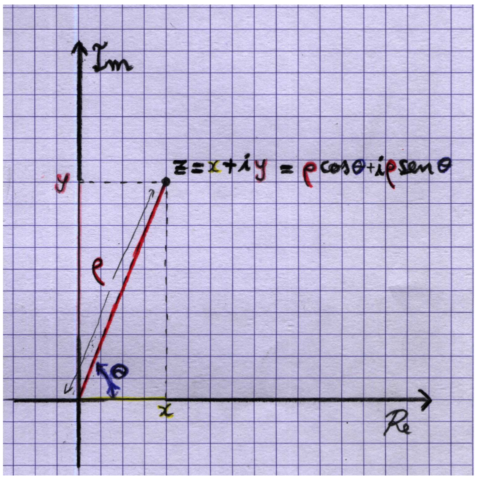
Curiosa é a relação do produto de números complexos e o produto interno e externo de vectores no plano:

$$\begin{aligned}
\overline{z_1} z_2 &= \overline{(x_1 + iy_1)}\,(x_2 + iy_2) \\
&= (x_1 - iy_1)\,(x_2 + iy_2) \\
&= x_1x_2 + y_1y_2 + i\,(x_1y_2 - y_1x_2) \\
&= (x_1, y_1)\,.\,(x_2, y_2) + i\,(x_1, y_1) \times (x_2, y_2)
\end{aligned}$$

No entanto para interpretarmos geometricamente o produto de números complexos, convém representar os números complexos (pontos do plano) em coordenadas polares.

Dado o número complexo $z = x + iy$, a sua parte real x e a sua parte imaginária y, podem ser representadas em coordenadas polares ρ e θ:

$$x = \rho \cos\theta \qquad \text{e} \qquad y = \rho \operatorname{sen}\theta.$$



Pelo que

$$z = \rho\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)\,.$$

Temos então

$$\rho = |z| \qquad \text{e} \qquad \theta = \arg z.$$

O argumento de um número complexo z (diferente de zero), $\arg z$, é o ângulo que o segmento de recta que une 0 a z faz com eixo real, medido no sentido positivo (contrário aos ponteiros do relógio) e definido a menos da adição de um múltiplo inteiro de 2π.

O produto de números complexos é facilmente descrito em temos de coordenadas polares:

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= \rho_1\,(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)\,\rho_2\,(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2) \\
&= \rho_1\rho_2\,[\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + i\,(\cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2)] \\
&= \rho_1\rho_2\,[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]\,.
\end{aligned}$$

Portanto no produto de dois números complexos multiplicam-se os módulos e somam-se os argumentos. O que motiva a seguinte definição:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

De acordo com esta definição temos:

$$e^0 = 1 \qquad \text{e} \qquad e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \tag{2.1}$$

Note-se ainda que (com $\theta \in \mathbb{R}$)

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \qquad \text{e} \qquad \left|e^{i\theta}\right| = 1.$$

Um número complexo escreve-se, então, na forma polar, do seguinte modo:

$$z = \rho e^{i\theta}.$$

2.2 Fórmula de De Moivre.

Dado $z = \rho e^{i\theta} = \rho\left(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta\right) \in \mathbb{C}$, temos

$$z^2 = \rho e^{i\theta}\rho e^{i\theta} = \rho^2 e^{i2\theta}$$

e

$$z^3 = zz^2 = \rho e^{i\theta}\rho^2 e^{i2\theta} = \rho^3 e^{i3\theta}.$$

Concluímos por indução que

$$z^n = \rho^n e^{in\theta},$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$, e como $\rho^n e^{in\theta}\rho^{-n}e^{-in\theta} = \rho^{n-n}e^{in\theta-in\theta} = \rho^0 e^0 = 1$, podemos mesmo pôr $n \in \mathbb{Z}$. Mostrámos portanto a fórmula de De Moivre:

$$\left(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta\right)^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta.$$

Exemplo 2.1 *Pela fórmula de De Moivre temos*

$$\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)^4 = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi,$$

ou seja

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = -1.$$

De facto

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + i\right)^2 = i^2 = -1.$$

Vamos agora resolver o seguinte problema:

Dados um número complexo $w = re^{i\alpha}$ e um número natural n, determinar os números complexos $z = \rho e^{i\theta}$ tais que $z^n = w$, ou seja determinar $\sqrt[n]{w}$.

Temos então
$$\rho^n e^{in\theta} = re^{i\alpha}.$$
Pelo que (porque $|z^n| = |w|$)
$$\rho^n = r$$
e consequentemente
$$e^{in\theta} = e^{i\alpha},$$
ou seja
$$\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha.$$
Portanto
$$\begin{cases} \cos n\theta = \cos\alpha \\ \operatorname{sen} n\theta = \operatorname{sen}\alpha \end{cases},$$
pelo que
$$n\theta = \alpha + k2\pi,$$
com $k \in \mathbb{Z}$. Obtém-se
$$\theta = \frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}.$$
Concluímos
$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{re^{i\alpha}} = \sqrt[n]{re^{i(\alpha+k2\pi)}} = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)},$$
com $k = 0, 1, ..., n-1$, uma vez que $e^{i(k+n)\frac{2\pi}{n}} = e^{i\left(k\frac{2\pi}{n}+2\pi\right)} = e^{ik\frac{2\pi}{n}}e^{i2\pi} = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$.

Verificamos que a raiz n de um número complexo é um conjunto de n valores complexos.

O símbolo $\sqrt[n]{a}$ é utilizado para representar duas entidades distintas: um conjunto de números complexos z tais que $z^n = a$; ou , no caso de a ser um número real positivo, o (único) número real positivo x tal que $x^n = a$.

Exemplo 2.2 *Cálculo de* $\sqrt[3]{32\sqrt{3} + i32}$

Seja $\omega = 32\sqrt{3} + i32$. *Então*
$$\begin{aligned} |\omega| &= \sqrt{(32)^2\,3 + (32)^2} \\ &= 32\sqrt{3+1} \\ &= 64, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega &= 64\frac{32\sqrt{3} + i32}{64} \\ &= 64\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) \\ &= 64\,e^{i\frac{\pi}{6}}, \end{aligned}$$

$\sqrt[3]{\omega} = \sqrt[3]{64}\,e^{i\left(\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}\right)} = 4\,e^{i\left(\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}\right)}$, $k = 0, 1, 2.$

Exemplo 2.3 *Vamos calcular $\sqrt[4]{1}$ entendido como um conjunto de números complexos:*

$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1e^{ik2\pi}} = e^{ik\frac{\pi}{2}},$$

com $k = 0, 1, 2, 3$. Ou seja $\sqrt[4]{1} = \left\{1, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{3\pi}{2}}\right\} = \{1, i, -1, -i\}$.

Exemplo 2.4 *Vamos calcular $\sqrt[4]{-1}$ entendido como um conjunto de números complexos, ou seja como o conjunto das soluções complexas da equação $z^4 + 1 = 0$:*

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1e^{i(\pi+k2\pi)}} = e^{i\frac{\pi}{4}}e^{ik\frac{\pi}{2}},$$

com $k = 0, 1, 2, 3$. Como $e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, obtemos

$$\left\{z \in \mathbb{C} : z^4 + 1 = 0\right\} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

Exemplo 2.5 *As duas raizes quadradas de um número complexo são simétricas em relação à origem:*

$$\begin{aligned}
\sqrt{z} &= \sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg z + k2\pi}{2}} \qquad \text{com } k = 0, 1\\
&= \sqrt{|z|}e^{i\left(\frac{\arg z}{2} + k\pi\right)}\\
&= \sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg z}{2}}e^{ik\pi}\\
&= \pm\sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg z}{2}},
\end{aligned}$$

visto que $e^{ik\pi} = 1$ se $k = 0$, mas $e^{ik\pi} = -1$ se $k = 1$.

2.3 Fórmulas de Euler.

Como consequência imediata da definição $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$, temos

$$\cos\theta = \mathrm{Re}\, e^{i\theta} = \frac{e^{i\theta} + \overline{e^{i\theta}}}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{Im}\, e^{i\theta} = \frac{e^{i\theta} - \overline{e^{i\theta}}}{2i},$$

ou seja

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

conhecidas como Fórmulas de Euler. Estas fórmulas têm um significado profundo que se tornará claro mais adiante. No entanto, mesmo do ponto de vista formal, são úteis na manipulação de funções trigonométricas (usadas em conjunção com as propriedades (2.1)).

Exemplo 2.6

$$\begin{aligned}
\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta &= \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}\frac{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}{2i}\\
&= \frac{e^{i(\alpha+\beta)} - e^{i(\alpha-\beta)} + e^{-i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha+\beta)}}{4i}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(\alpha+\beta)} - e^{-i(\alpha+\beta)}}{2i} - \frac{e^{i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha-\beta)}}{2i}\right)\\
&= \frac{\mathrm{sen}\,(\alpha+\beta) - \mathrm{sen}\,(\alpha-\beta)}{2}
\end{aligned}$$