1 ª Aula 2006.02.20 AMIV LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

1.1 Um pouco da história dos números complexos.

Considere-se a seguinte equação

$$z^2 + 2z + 5 = 0.$$

Aplicando precipitadamente a fórmula resolvente para equações quadráticas obtemos as raízes:

$$z = -1 + \sqrt{-4} \quad \text{e} \quad z = -1 - \sqrt{-4}.$$

Do ponto de vista da análise real o símbolo $\sqrt{-4}$ não está definido e por outro lado a identificação da expressão $z^2 + 2z + 5$ com o gráfico de uma parábola retira qualquer dúvida sobre o facto da equação $z^2 + 2z + 5 = 0$ não ter raízes reais.

Contudo, se utilizarmos as seguintes as regras formais:

$$\sqrt{-a^2} = |a|\sqrt{-1} \quad \text{e} \quad \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1,$$

obtemos objectos "imaginários"

$$z = -1 \pm \sqrt{-4} = -1 \pm 2\sqrt{-1},$$

que podem ser considerados raízes da equação $z^2 + 2z + 5 = 0$. De facto, formalmente temos:

$$\begin{aligned} \left(-1 \pm 2\sqrt{-1}\right)^2 + 2\left(-1 \pm 2\sqrt{-1}\right) + 5 &= 1 \mp 4\sqrt{-1} - 4 - 2 \pm 4\sqrt{-1} + 5 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Este tipo de considerações teve uma importância histórica na resolução de equações, não do segundo grau (que eram bem compreendidas na altura), mas do terceiro grau quando ainda se desconhecia uma forma de resolução geral destas equações.

No século XVI, o matemático Cardano aperfeiçoou uma misteriosa fórmula resolvente para equações do 3º grau (fórmula de Cardano). Esta fórmula aplica-se a equações da forma[1] normal $x^3 + px + q = 0$ e escreve-se (em notação actual)

$$x = u - \frac{p}{3}\frac{1}{u} \quad \text{onde} \quad u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Contudo, embora esta fórmula funcionasse muito bem em certos casos ($\frac{p^3}{27} \geqslant -\frac{q^2}{4}$), havia outros ($\frac{p^3}{27} < -\frac{q^2}{4}$) em que a fórmula envolvia as imaginárias raízes quadradas de números negativas. O caso era ainda mais misterioso pois eram conhecidos exemplos de equações cúbicas com três raízes reais em que a referida fórmula supostamente não funcionava por envolver raízes quadradas de números negativos.

[1] Qualquer equação do 3º grau se pode transformar numa equação com esta forma através de uma mudança de variáveis linear.

Exemplo 1.1 *Para a equação*

$$x^3 - 15x - 4 = 0, \tag{1.1}$$

G. Cardano (princípio do séc. XVI) obteve a solução[2]

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}.$$

Mais tarde R. Bombelli (meados do séc. XVI) observou que formalmente

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-121}$$

e

$$\left(2-\sqrt{-1}\right)^3 = 2 - \sqrt{-121}$$

Pelo que uma solução da equação (1.1) é

$$\begin{aligned} x &= 2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1} \\ &= 4 \end{aligned}$$

*As outras duas soluções (**reais!**), $-2+\sqrt{3}$ e $-2-\sqrt{3}$ podem ser obtidas de forma semelhante ou através da regra de Ruffini.*

O mistério adensava-se. Só no princípio do séc. XIX é que Gauss e outros matemáticos, conseguiram um avanço significativo neste problema, identificando cada número imaginário da forma $x+y\sqrt{-1}$ com um ponto (x,y) do plano (real- $\mathbb{R}^2$). Outra barreira psicológica que foi ultrapassada, foi a de ver o símbolo $\sqrt{-1}$, não como uma raiz inexistente de uma certa equação, mas como um número de pleno direito, designado por i, que era exterior ao corpo de números reais conhecidos, e que satisfazia a propriedade $i^2 = -1$. Portanto, por um lado concretizou-se com uma interpretação geométrica, por outro lado idealizou-se alargando o conceito de número.

---

[2] Fazendo $x = u + v$, vem $x^3 = u^3 + v^3 + 3uvx$, pelo que a equação fica

$$u^3 + v^3 + 3uvx - 15x - 4 = 0.$$

Esta é satisfeita se

$$\begin{cases} u^3 + v^3 - 4 = 0 \\ uv = 5 \end{cases},$$

donde se obtém a equação quadrática em u^3:

$$u^6 - 4u^3 + 125 = 0.$$

Resolvendo esta equação ficamos com $u^3 = 2 \pm \sqrt{-121}$. Determinado as três raízes cúbicas de (por exemplo) $2+\sqrt{-121}$ obtemos as três soluções da equação cúbica original através de

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \frac{5}{\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}}.$$

1.2 Propriedades algébricas e geométricas

Os números complexos (ou números imaginários) podem ser vistos como o conjunto dos pontos do plano (Plano complexo ou diagrama de Argand) munidos da adição vectorial e de um produto abaixo descrito. Temos pois uma identificação natural entre $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$:

$$(a, b) \leftrightarrow a + ib.$$

Os números complexos formam um corpo

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\},$$

munido da *soma*

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

e do *produto*

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(y_1 x_2 + x_1 y_2).$$

Note-se que a soma é a soma vectorial usual e o produto generaliza o produto de um escalar por um vector ($y_1 = 0$).

Dar um número complexo $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, é portanto dar um par de números reais, $x, y \in \mathbb{R}$, designados respectivamente por parte real ($x = \operatorname{Re} z$) e por parte imaginária ($y = \operatorname{Im} z$) desse número complexo z. Note-se que $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$ e que $\operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$.

O eixo real $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}$ corresponde ao eixo das abcissas, que pode ser considerado o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ como subconjunto do plano $\mathbb{C}$ dos números complexos (se $x \in \mathbb{R}$, então $x = x + i0 \in \mathbb{C}$), notando que a soma e o produto em $\mathbb{R}$ são a restrição da soma e do produto em $\mathbb{C}$ ($y_1 = 0$ e $y_2 = 0$).

Da mesma forma temos o eixo imaginário $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0\}$ corresponde ao eixo das coordenadas.

O *conjugado* de um número complexo $z = x+iy$ é o número complexo $\overline{z} = x-iy = x+i(-y)$. Corresponde ao ponto que se obtém por simetria em relação ao eixo real. Munidos desta operação podemos escrever

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

É imediato verificar a seguinte propriedade

$$\overline{z_1 \, z_2} = \overline{z_1} \; \overline{z_2},$$

i. e. o conjugado do produto é igual ao produto dos conjugados. Do mesmo modo se verifica que o produto de um número pelo seu conjugado é sempre um número real não negativo:

$$z\overline{z} = x^2 + y^2.$$

O *Módulo* de um número complexo é definido por

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

corresponde à norma em $\mathbb{R}^2$. O módulo da diferença entre dois números complexos $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ é igual, portanto, à distância entre os pontos do plano que estes números representam

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Por outro lado, se $\operatorname{Im} z = y = 0$, então $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$, concluindo-se que o módulo de um número complexo é também a generalização da função módulo real de variável real.

Temos então que $|z|$ é um número real não negativo, sendo nulo apenas no caso $z = 0$. Temos ainda as seguintes propriedades bem conhecidas:

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

(desigualdade triangular) e

$$\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

($|x| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant |x| + |y|$). Por outro lado

$$|z_1\, z_2| = |z_1|\ |z_2|$$

(o módulo do produto é igual ao produto dos módulos), de facto

$$|z_1\, z_2|^2 = z_1\, z_2\, \overline{z_1\, z_2} = z_1\, z_2\, \overline{z_1}\, \overline{z_2} = z_1\, \overline{z_1}\, z_2\, \overline{z_2} = |z_1|^2\ |z_2|^2\,.$$

Facilmente se verifica que $\mathbb{C}$ é um corpo em que o elemento neutro da adição é $0 = 0 + i0$ e o elemento neutro de multiplicação é $1 = 1 + i0$. Em particular para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existe um (único) inverso $w \in \mathbb{C}$ (i. e. $wz = 1$ ou $w = \frac{1}{z} = z^{-1}$), que facilmente se verifica ser dado pela expressão

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}.$$

De facto $\frac{1}{|z|^2}\overline{z}z = \frac{1}{|z|^2}|z|^2 = 1$. Ou seja

$$(x + iy)^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Sendo $\mathbb{C}$ um corpo, tal como $\mathbb{R}$, diferencia-se deste, porque $\mathbb{C}$ não é ordenado. Por outro lado a diferença com $\mathbb{R}^2$ consiste na operação produto; em $\mathbb{C}$ a multiplicação de dois pontos do plano é ainda um ponto do plano.