

Análise Matemática IV

LEAN, LEC

1º Semestre de 2004/05

Problemas para a aula prática

12ª Semana

1. Determine a solução geral das seguintes equações lineares homogêneas:

a) $y'' - y' - 6y = 0$

b) $y'' - 6y' + 13y = 0$

c) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

d) $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$

2. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

a) $y''' - y'' + y' - y = 0$ com $y(0) = y'(0) = -y^{(2)}(0) = 1$

b) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$ com $y(0) = y'(0) = 1$ e $y^{(2)}(0) = 4$

c) $y''' + 5y'' + y = 0$ com $y(0) = y'(0) = y^{(2)}(0) = 0$

3. Considere a seguinte equação linear homogênea:

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + 8y'' - 8y' + 4y = 0$$

a) Mostre que a função $e^t \cos t$ é uma solução particular desta equação.

b) Determine a solução geral.

4. Determine a solução da equação escalar linear:

$$y^{(3)} - 2y^{(2)} + y - 2 = b(t),$$

que verifica as condições iniciais:

$$y(0) = y'(0) = 0, y^{(2)}(0) = 1,$$

quando:

a) $b(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

b) $b(t) = t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

c) $b(t) = e^t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

5. Determine a solução geral das equações diferenciais:

a) $y''' - 4y' = 8t - 16 \sin(2t)$

b) $y'' - 3y' + 2y = te^{2t}$

6. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$y'' - 3\pi y' + 2\pi^2 y = \pi^2 e^{\pi t}, \quad \text{com } y(0) = 1, y'(0) = \pi.$$

7. Considere a equação

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + y^{(2)} = t + \cos t \quad (*)$$

- a) Determine a solução geral da equação homogênea associada a (*).
- b) Determine uma solução particular de (*).
- c) Determine a solução de (*) que satisfaz a condição

$$y(0) = y'(0) = y^{(2)}(0) = y^{(3)}(0) = 0.$$

8. Considere a equação

$$y^{(3)} - 4y^{(2)} + 5y' = 0.$$

- a) Determine a sua solução geral.
- b) Determine para que condições iniciais em $t = 0$ é que os problemas de valor inicial correspondentes têm soluções convergentes quando $t \rightarrow +\infty$.

9. Resolva os sistemas

a)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

Sugestão: Reduza cada sistema a uma equação escalar em apenas uma variável.

10. Seja $k > 0$. Para que valores de $c \in \mathbb{R}$ é que a equação:

$$y^{(2)} - 2cy' + y = 0$$

admite uma solução satisfazendo $y(0) = y(2k\pi) = 0$, que não seja identicamente nula?

11. Considere uma equação diferencial linear homogênea de coeficientes constantes e com a menor ordem possível que admite as soluções t e $\sin(2t)$. Qual a solução geral dessa equação?

12. Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{1+t^2}, \quad \text{com } y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$