

Análise Matemática IV

LEAN, LEC

1º Semestre de 2004/05

Problemas para a aula prática

6ª Semana

1. Considere a função $f(z) = \frac{e^z}{\sin^2 z}$. Sem calcular os respectivos coeficientes, indique justificadamente qual o raio de convergência do desenvolvimento de f em série de potências de $z - 2$.

2. Determine a série de Laurent de $\frac{1}{(z^2 - 1)^2}$ nas seguintes regiões:

a) $0 < |z - 1| < 2$.

b) $2 < |z - 1|$.

e aproveite os resultados para calcular os seguintes integrais:

a) $\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2 - 1)^2} dz$;

b) $\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z^2 - 1)^2} dz$.

3. Calcule

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{((z-i)^2 + (z-i) - 6)(z-i)^{20}} dz .$$

Sugestão: Considere $\xi = z - i$ e desenvolva $\frac{1}{\xi^2 + \xi - 6}$ em série de potências de ξ .

4. Determine e classifique as singularidades das seguintes funções. Calcule os resíduos correspondentes.

a) $f_1(z) = \frac{1 - \cos z}{z - \pi}$.

b) $f_2(z) = \frac{z}{(z^2 + 2)^2}$.

c) $f_3(z) = \frac{1}{z^7(1 - z^2)}$.

d) $f_4(z) = \frac{z \sin z}{(z - \pi)^6}$.

e) $f_5(z) = z^2 \exp \frac{1}{z}$.

f) $f_6(z) = \frac{1 - \cos z}{z \sin z}$.

g) $f_7(z) = \frac{z - \pi/2}{\cos z}$.

5. Justifique que a função

$$g(z) = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{z}}$$

tem uma singularidade em $z = 0$ que **não é isolada**.

6. Utilize o Teorema dos Resíduos para calcular (considere sempre as curvas indicadas percorridas uma vez no sentido positivo)

a) $\oint_{|z+1+i|=2} \frac{\operatorname{sen} z}{(z^2 - 1)} dz.$

b) $\oint_{|z|=3} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2 (\pi - z)} dz.$

c) $\oint_{|z|=1} \frac{e^z - 1}{z^3} dz.$

7. Calcule:

$$\oint_C \frac{1}{e^{z^2} - 1} dz,$$

onde C é a circunferência $|z| = \sqrt{7}$ percorrida no sentido positivo.

8. Estabeleça, através do Teorema dos Resíduos e mediante a escolha de um contorno de integração adequado, os seguintes resultados:

a) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \operatorname{sen}^2 \theta} = \pi \sqrt{\frac{2}{3}}$

b) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(3\theta)}{5 - 4 \cos(2\theta)} d\theta = \frac{3\pi}{8}$

(sugestão: mostre que $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(3\theta)}{5 - 4 \cos(2\theta)} d\theta = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{i3\theta}}{5 - 4 \cos(\theta)} d\theta$)

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)} dx = \frac{(3 - \sqrt{3})\pi}{6}$

d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6 + 1} = \frac{2}{3}\pi$

e) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{(x^2 + 1)} dx = \frac{\pi}{e}$

f) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\sqrt{2}\pi x)}{x^4 + 1} dx = -\frac{\pi e^{-\pi}}{\sqrt{2}}$

9. Utilizando o Teorema dos resíduos, calcule

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^n} dx,$$

onde n é um natural maior ou igual que 2.

Sugestão: Considere a fronteira da região $\{z = \rho e^{i\theta} : \rho \in]0, R[, \theta \in]0, \frac{2\pi}{n}[\}$, com $R > 1$.