Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

2º Exame do 2º semestre de 03/04
(**cursos:** LEAN, LEBL, LEQ, LQ)

Data: 2004.07.08, 9h00
Duração: 3h00.

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

(2 v) 1. Calcule o integral

$$\oint_C \frac{f(2z)}{(z+\pi)^2}\,dz$$

onde a curva orientada $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 4\}$ é percorrida uma vez no sentido directo e $f(z)$ é uma função analítica em $\mathbb{C}$ tal que

$$\operatorname{Re} f(x+iy) = x + e^{-y}\cos x.$$

(2 v) 2. Calcule o integral

$$\oint_C z(z-1)\operatorname{sen}\frac{1}{z-1}\,dz$$

onde $C = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| + |z+i| = 4\}$ é percorrida uma vez em sentido directo.

(2 v) 3. Considere a função complexa definida por $\psi(z) = \dfrac{1}{z^4-16} + \dfrac{1}{z^3-i}$

(i) Determine e classifique todas as singularidades de ψ.

(ii) Para esta função determine a série de Laurent centrada na origem que é convergente no ponto $\sqrt{2}$, esclarecendo qual é o interior da sua região de convergência.

(2 v) 4. Calcule o valor do integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(9+x^2)^2}\,dx.$$

(2 v) 5. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$y^2 - t\,(t+2) + 2y\,y' = 0\ ; \qquad y(0) = -1\ .$$

Indique o intervalo máximo de definição desta solução.

(2,5 v) 6. Considere o sistema linear

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

Calcule os valores próprios, os vectores próprios e (caso os haja) os vectores próprios generalizados da matriz do sistema e escreva uma expressão para a solução geral *real* deste sistema de equações diferenciais.

(2 v) 7. Determine a solução geral da seguinte equação linear

$$y'' - y' - 2y = e^{-t} + e^{2t}\ .$$

(2 v) 8. Calcule a solução do seguinte problema não linear de valor inicial

$$\ddot{y} = 2\frac{\dot{y}\,(\dot{y}-1)}{\operatorname{tg} y} \qquad \text{com } y\,(1) = \frac{5\pi}{4} \quad \text{e} \quad \dot{y}\,(1) = \frac{1}{2}.$$

Indique o intervalo máximo de definição.

(1,5 v) 9. Considere a função $f\,(x) = |x-\pi| - \pi$ definida no intervalo $[0, 2\pi]$. Desenvolva esta função em série de senos.

(2 v) 10. Utilizando o método de separação de variáveis, obtenha a solução formal do seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\ \operatorname{sen} t & \text{para } t \in \mathbb{R} \quad \text{e } x \in\,]0, 2\pi[\\ u\,(t,0) = u\,(t,2\pi) = 0 & \text{para } t \in \mathbb{R} \\ u\,(0,x) = |x-\pi| - \pi & \text{para } x \in\,]0, 2\pi[\end{cases}$$