

ANÁLISE MATEMÁTICA IV
2º semestre de 03/04 (cursos: LEAN, LEBL, LEQ, LQ)
3º Teste, 22 de Junho 2004

Nome: _____

Sala: _____

Nº: _____

Rubrica (DOCENTE):

Curso: _____

- Este teste tem quatro questões que devem ser resolvidas nas próprias folhas do enunciado.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta ou máquinas calculadoras.
- Desligue e guarde o seu telemóvel.
- Escreva a tinta escura e claramente.
- Justifique sempre os seus cálculos de forma sucinta.
- Cotações: **1.** $\mapsto$ 15 p. **2.** $\mapsto$ 15 p. **3.** $\mapsto$ 15 p. **4.** $\mapsto$ 20 p.



1. Determine a solução do seguinte problema não linear de valor inicial

$$\ddot{y} = -\dot{y}^3 \sin y \quad \text{com } y(0) = \pi \quad \text{e} \quad \dot{y}(0) = -1.$$

Indique o intervalo máximo de definição.

Resolução:

Seja v tal que $\dot{y} = v(y)$. Então $\ddot{y} = v'v$, $v(\pi) = -1$ e a equação fica

$$v'v = -v^3 \sin y.$$

atendendo que $v \neq 0$ numa vizinhança da condição inicial, temos

$$-\frac{v'}{v^2} = \sin y \Leftrightarrow \frac{1}{v} = -\cos y + c$$

onde a constante c é determinada pela condição $v(\pi) = -1$, ou seja $c = -2$. Portanto

$$v = \frac{-1}{2 + \cos y} \text{ e}$$

$$\dot{y} = \frac{-1}{2 + \cos y}.$$

Donde $(2 + \cos y) \dot{y} = -1$ e integrando esta relação vem $2y + \sin y = -t + k$ e como $y(0) = \pi$ deduz-se

$$2y + \sin y = -t + 2\pi.$$

A função $F(x) = 2x + \cos x$, satisfaz as seguintes propriedades:

$$F'(x) = 2 - \sin x > 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty.$$

Pelo que $F(x)$ é estritamente crescente. Então, sendo uma função contínua, é injectiva e, pelos limites calculados, é sobrejectiva. Concluindo-se que esta função é invertível em $\mathbb{R}$.

Seja então $F^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função inversa de $F(x)$. Podemos agora escrever

$$y(t) = F^{-1}(-t + 2\pi),$$

e concluir que o intervalo de definição (máximo) desta solução é $\mathbb{R}$.

2. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\ddot{y} + y = e^t - \sin t \quad \text{com } y(0) = 1 \quad \text{e} \quad \dot{y}(0) = 1.$$

Resolução:

O polinómio característico da equação homogénea correspondente é $\lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$. Por outro lado a função $e^t - \sin t$ é solução de uma equação linear homogénea com polinómio característico $(\lambda - 1)(\lambda - i)(\lambda + i)$. Pelo que a solução $y(t)$ do problema proposto é também solução de uma equação linear homogénea com polinómio característico $(\lambda - 1)(\lambda - i)^2(\lambda + i)^2$ e portanto

$$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \alpha t \cos t + \beta t \sin t + \gamma e^t.$$

Então

$$\begin{aligned} \ddot{y} + y &= (\alpha t \cos t + \beta t \sin t + \gamma e^t)'' + \alpha t \cos t + \beta t \sin t + \gamma e^t \\ &= ((\alpha + \beta t) \cos t + (\beta - \alpha t) \sin t + \gamma e^t)' + \alpha t \cos t + \beta t \sin t + \gamma e^t \\ &= ((2\beta - \alpha t) \cos t - (2\alpha + \beta t) \sin t + \gamma e^t)' + \alpha t \cos t + \beta t \sin t + \gamma e^t \\ &= 2\beta \cos t - 2\alpha \sin t + 2\gamma e^t \end{aligned}$$

Pelo que $\beta = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\gamma = \frac{1}{2}$. Donde

$$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{t}{2} \cos t + \frac{e^t}{2} \quad \text{e} \quad y(0) = C_1 + \frac{1}{2},$$

$$\dot{y}(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + \frac{1}{2} \cos t - \frac{t}{2} \sin t + \frac{e^t}{2} \quad \text{e} \quad \dot{y}(0) = C_2 + 1.$$

Usando as condições iniciais vem $C_1 = \frac{1}{2}$ e $C_2 = 0$, donde

$$y(t) = \frac{1}{2} (e^t + (1 + t) \cos t).$$

3. Considere a função $f(x) = \sin x$ definida no intervalo $[0, \pi]$. Desenvolva esta função a) em série de senos, b) em série de Fourier e c) em série de cossenos.

Resolução:

a) Obviamente que a função já está desenvolvida em série de senos (o prolongamento ímpar de f é a função $\sin x$ definida no intervalo $[-\pi, \pi]$ e o prolongamento periódico desta é ainda dado pela expressão $\sin x$ agora com domínio $\mathbb{R}$). Pelo que a série de senos de f é

$$\sin x$$

b) Série de Fourier (o prolongamento periódico de f é $|\sin x|$)

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(x) \sin(2nx) dx = 0$$

(de acordo com a alínea anterior). Por outro lado¹

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(x) \cos(2nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \frac{e^{i2nx} + e^{-i2nx}}{2} dx \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^\pi (e^{i(2n+1)x} - e^{i(2n-1)x} + e^{-i(2n-1)x} - e^{-i(2n+1)x}) dx \\ &= \frac{1}{2i\pi} \left(\frac{e^{i(2n+1)\pi} - 1}{i(2n+1)} - \frac{e^{i(2n-1)\pi} - 1}{i(2n-1)} + \frac{e^{-i(2n-1)\pi} - 1}{-i(2n-1)} - \frac{e^{-i(2n+1)\pi} - 1}{-i(2n+1)} \right) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \left(\frac{-2}{i(2n+1)} + \frac{2}{i(2n-1)} + \frac{-2}{-i(2n-1)} + \frac{2}{-i(2n+1)} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{2n+1} - \frac{2}{2n-1} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{4}{1-4n^2} \end{aligned}$$

Pelo que a série de Fourier de f é

$$\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{1-4n^2}$$

c) Série de cossenos (o prolongamento par de f é a função $|\sin x|$ definida no intervalo $[-\pi, \pi]$ e o prolongamento periódico desta é ainda dado pela expressão $|\sin x|$ agora com domínio $\mathbb{R}$). De acordo com a alínea anterior a série de cossenos de f é

$$\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{1-4n^2}$$

¹Ou

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(x) \cos(2nx) dx = \frac{2}{\pi} \left([-\cos(x) \cos(2nx)]_0^\pi - 2n \int_0^\pi \cos(x) \sin(2nx) dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(2 - 2n \left([\sin(x) \sin(2nx)]_0^\pi - 2n \int_0^\pi \sin(x) \cos(2nx) dx \right) \right) = \frac{2}{\pi} \left(2 + 4n^2 \int_0^\pi \sin(x) \cos(2nx) dx \right) \\ &= \frac{4}{\pi} + 4n^2 a_n \end{aligned}$$

$$\text{donde } a_n = \frac{4}{\pi(1-4n^2)}.$$

4. Resolva formalmente o seguinte problema com condições fronteira e valores iniciais:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u & \text{para } t \in \mathbb{R} \text{ e } x \in]0, \pi[\\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi) = 0 & \text{para } t \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = \sin x \text{ e } \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0 & \text{para } x \in]0, \pi[\end{cases}$$

Resolução:

Procurando soluções separadas de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u$, com $\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi) = 0$, temos para $u(t, x) = T(t) X(x)$,

$$T(t) X''(x) = T''(t) X(x) + T(t) X(x), \quad \text{com } X'(0) = X'(\pi) = 0.$$

Então

$$X''(x) = \sigma X(x), \quad \text{com } X'(0) = X'(\pi) = 0.$$

e

$$T''(t) + T(t) = \sigma T(t)$$

onde σ é uma constante real.

O problema em X só tem soluções não triviais se $\sigma = -n^2$ para algum $n \in \mathbb{N}_0$. De facto se $\sigma = 0$ vem $X(x) = a + bx$, e as condições fronteira impõem $b = 0$, obtendo-se uma solução constante $X(x) = a$. Se pelo contrário $\sigma \neq 0$, então as soluções de $X'' - \sigma X = 0$ são $X(x) = ae^{\sqrt{\sigma}x} + be^{-\sqrt{\sigma}x}$; portanto $X'(x) = \sqrt{\sigma}(ae^{\sqrt{\sigma}x} - be^{-\sqrt{\sigma}x})$ condições fronteira impõem $a = b$ e (para $a \neq 0$) $e^{2\sqrt{\sigma}\pi} = 1$, ou seja $\sqrt{\sigma} = in$ e $\sigma = -n^2$.

Para $\sigma = -n^2$. Por um lado temos $X(x) = K \cos(nx)$, onde K é uma constante arbitrária e por outro

$$T''(t) + (1 + n^2) T(t) = 0,$$

que tem polinómio característico $P(\lambda) = \lambda^2 + 1 + n^2 = (\lambda - i\sqrt{1 + n^2})(\lambda + i\sqrt{1 + n^2})$. Pelo que

$$T(t) = A \cos(\sqrt{1 + n^2}t) + B \sin(\sqrt{1 + n^2}t),$$

onde A e B são constantes arbitrárias.

Encontramos então as seguintes soluções

$$X(x) = K \cos(nx) \quad \text{e} \quad T(t) = A \cos(\sqrt{1 + n^2}t) + B \sin(\sqrt{1 + n^2}t).$$

Fazendo combinações lineares destas soluções separadas $X(x)T(t)$, obtemos a seguinte solução formal, aonde α_n e β_n são constantes,

$$u(t, x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos(\sqrt{1 + n^2}t) + \beta_n \sin(\sqrt{1 + n^2}t) \right) \cos(nx).$$

Usando agora a primeira condição inicial obtemos

$$u(0, x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx) = \sin x.$$

De acordo com a questão anterior vem

$$\alpha_n = \frac{4}{\pi} \frac{1}{1 - 4n^2}.$$

Derivando em ordem a t a expressão de $u(t, x)$ vem

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 + n^2} \left(-\alpha_n \operatorname{sen} \left(\sqrt{1 + n^2} t \right) + \beta_n \cos \left(\sqrt{1 + n^2} t \right) \right) \cos(nx),$$

pelo o que, usando a segunda condição inicial vem

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 + n^2} \beta_n \cos(nx) = 0,$$

donde $\beta_n = 0$ para todo n .

Portanto a solução do problema é

$$u(t, x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - 4n^2} \cos \left(\sqrt{1 + n^2} t \right) \cos(nx)$$