

ANÁLISE MATEMÁTICA IV
2º semestre de 03/04 (cursos: LEAN, LEBL, LEQ, LQ)
2º Teste, 21 de Maio 2004

Nome: _____

Sala: _____

Nº: _____

Rubrica (DOCENTE):

Curso: _____

- Este teste tem quatro questões que devem ser resolvidas nas próprias folhas do enunciado.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta ou máquinas calculadoras.
- Desligue e guarde o seu telemóvel.
- Escreva a tinta escura e claramente.
- Justifique sempre os seus cálculos de forma sucinta.
- Cotações: **1.** $\mapsto$ 15 p. **2.** $\mapsto$ 10 p. **3.** $\mapsto$ 20 p. **4.** $\mapsto$ 20 p.



1. Utilize o Teorema dos Resíduos para calcular o seguinte integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 3)^2} dx$$

Resolução:

Considerando o segmento de recta $I_R = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z = 0 \text{ e } |z| < R\}$ orientado de $z = -R$ para $z = R$, a semicircunferência $C_R = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0 \text{ e } |z| = R\}$ orientada de $z = R$ para $z = -R$ e a curva fechada Γ_R (orientada no sentido directo) que se obtém por concatenação das curvas I_R e C_R , temos

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 3)^2} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 3)^2} dx = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{1}{(x^2 + 3)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{I_R} \frac{1}{(z^2 + 3)^2} dz \\ &= \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\oint_{\Gamma_R} \frac{1}{(z^2 + 3)^2} dz - \int_{C_R} \frac{1}{(z^2 + 3)^2} dz \right] \end{aligned}$$

Uma vez que para $R > \sqrt{3}$ vem

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{1}{(z^2 + 3)^2} dz \right| &\leq \int_{C_R} \left| \frac{1}{(z^2 + 3)^2} \right| |dz| \leq \int_{C_R} \frac{1}{(|z|^2 - 3)^2} |dz| = \\ &\leq \frac{\pi R}{(R^2 - 3)^2} \rightarrow 0 \quad \text{quando } R \rightarrow \infty \end{aligned}$$

concluimos (para $R_0 > \sqrt{3}$)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 3)^2} dx = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma_{R_0}} \frac{1}{(z^2 + 3)^2} dz,$$

porque as singularidades da função $\frac{1}{(z^2+3)^2}$ estão sobre a circunferência $|z| = \sqrt{3}$. De facto $\frac{1}{(z^2+3)^2}$ tem singularidades nos pontos $z = i\sqrt{3}$ e $z = -i\sqrt{3}$ que são os únicos valores que anulam o denominador da função racional considerada. Destas singularidades apenas $z = i\sqrt{3}$ se encontra na região delimitada pela curva Γ_{R_0} . Então pelo Teorema dos Resíduos

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 3)^2} dx = \frac{1}{2} 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i\sqrt{3}} \frac{1}{(z^2 + 3)^2}.$$

Como

$$\lim_{z=i\sqrt{3}} \frac{(z - i\sqrt{3})^2}{(z^2 + 3)^2} = \lim_{z=i\sqrt{3}} \frac{1}{(z + i\sqrt{3})^2} = \frac{1}{(2i\sqrt{3})^2} = \frac{-1}{12},$$

temos um pólo de 2^a ordem e o respectivo resíduo pode ser calculado por

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=i\sqrt{3}} \frac{1}{(z^2 + 3)^2} &= \lim_{z=i\sqrt{3}} \frac{d}{dz} \frac{(z - i\sqrt{3})^2}{(z^2 + 3)^2} = \lim_{z=i\sqrt{3}} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z + i\sqrt{3})^2} \\ &= \lim_{z=i\sqrt{3}} \frac{-2}{(z + i\sqrt{3})^3} = \frac{-2}{(2i\sqrt{3})^3} = \frac{1}{i12\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Donde

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 3)^2} dx = \frac{\pi}{12\sqrt{3}}.$$

2. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$y' - y - e^t - \cos t = 0 \quad \text{com } y(0) = 0$$

Resolução:

Temos uma equação linear $y' - y = e^t + \cos t$. A equação homogênea correspondente tem solução geral dada por $y = ce^t$ (com c uma constante arbitrária). Por outro lado, pelo método dos coeficientes indeterminados vamos considerar uma solução particular da forma

$$z = \alpha te^t + \beta \cos t + \gamma \sin t.$$

Então

$$\begin{aligned} z' - z &= \alpha(t+1)e^t - \beta \sin t + \gamma \cos t - \alpha te^t - \beta \cos t - \gamma \sin t \\ &= \alpha e^t + (\gamma - \beta) \cos t - (\beta + \gamma) \sin t \end{aligned}$$

donde

$$\alpha = 1, \quad \gamma - \beta = 1 \quad \text{e} \quad \beta + \gamma = 0,$$

Ou seja $\alpha = 1$, $\beta = \frac{-1}{2}$ e $\gamma = \frac{1}{2}$. Portanto a solução geral da equação considerada é

$$y = ce^t + te^t + \frac{\sin t - \cos t}{2}.$$

Usando a condição inicial vem $0 = c - \frac{1}{2}$. Pelo que a solução pretendida é

$$y(t) = \frac{1}{2}e^t + te^t + \frac{\sin t - \cos t}{2}.$$

3. Considere a equação diferencial

$$2t (\sin y + 1) - \cos y y' = 0.$$

Calcule a solução que satisfaz a condição $y(0) = \pi$, indicando o seu intervalo máximo de definição.

Resolução:

Temos uma equação separável:

$$\frac{\cos y}{\sin y + 1} y' = 2t$$

(para $\sin y \neq -1$). Donde por primitivação se obtém

$$\log (\sin y + 1) = t^2 + c.$$

Usando a condição inicial $y(0) = \pi$, vem $c = \log (\sin \pi + 1) = \log 1 = 0$. Então

$$\sin y + 1 = e^{t^2}$$

e invertendo a função seno no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ ficamos com

$$y = \pi - \arcsen \left(e^{t^2} - 1 \right).$$

Para que esta resolução esteja correcta $-1 < e^{t^2} - 1 < 1$, ou seja

$$e^{t^2} < 2 \Leftrightarrow t^2 < \log 2 \Leftrightarrow -\sqrt{\log 2} < t < \sqrt{\log 2}.$$

Por outro lado

$$\lim_{t \rightarrow \pm\sqrt{\log 2}} y = \pi - \arcsen (1) = \frac{\pi}{2}$$

e usando este cálculo e a equação,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\sqrt{\log 2}} |y'| = \lim_{t \rightarrow \pm\sqrt{\log 2}} \left| 2t \frac{\sin y + 1}{\cos y} \right| = +\infty.$$

Pelo que a solução pretendida é

$$y(t) = \pi - \arcsen \left(e^{t^2} - 1 \right)$$

e o seu intervalo máximo de definição é $]-\sqrt{\log 2}, \sqrt{\log 2}[$.

4. Resolva o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x' = 4y + 2 \\ y' = -x + 4y + 1 \end{cases} \quad \text{com as condições } x(0) = y(0) = 0.$$

Resolução:

Este sistema pode ser escrito na forma matricial $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calculando os valores próprios desta matriz obtemos

$$\det(\mathbf{A} - \lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 4 \\ -1 & 4-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(4-\lambda) + 4 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

Calculando os valores próprios $\mathbf{v}$: $\mathbf{A}\mathbf{v} = 2\mathbf{v} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - 2)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}$, facilmente concluímos que $\mathbf{v}$ é múltiplo de $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, pelo que apenas temos um vector próprio linearmente independente e portanto só podemos ter um bloco de Jordan na forma canónica associada, i. e.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Designa-se então por $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ as colunas da matriz $\mathbf{S}$ (com $\det \mathbf{S} \neq 0$) tal que $\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{J}$. Obtemos $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$, ou seja $(\mathbf{A} - 2)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ e $(\mathbf{A} - 2)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$. Podemos escolher

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e (uma vez feita esta escolha) } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pelo que podemos tomar $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Então

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{t\mathbf{A}} &= \mathbf{S}\mathbf{e}^{t\mathbf{J}}\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -t & 1+2t \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= e^{2t} \begin{bmatrix} 1-2t & 4t \\ -t & 1+2t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Então pela fórmula da variação das constantes

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= \mathbf{e}^{t\mathbf{A}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \mathbf{e}^{(t-s)\mathbf{A}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} dt \\ &= \int_0^t e^{2(t-s)} \begin{bmatrix} 1-2(t-s) & 4(t-s) \\ -(t-s) & 1+2(t-s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} dt \\ &= \int_0^t e^{2(t-s)} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \int_0^t e^{2(t-s)} dt = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1-e^{2t}}{-2}. \end{aligned}$$

Portanto a solução do sistema com condição inicial é dada pelas funções

$$x(t) = e^{2t} - 1 \quad \text{e} \quad y(t) = \frac{e^{2t} - 1}{2}.$$