

Análise Matemática IV

LEAN, LEBI, LEQ, LQ

2º Semestre de 2003/04

Problemas para a aula prática

13ª Semana

1. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} = -2 \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \operatorname{tg} y, \\ y(1) = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{dy}{dt}(1) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Sugestão: Determine $v(y)$ tal que $\dot{y} = v(y)$.

2. Usando métodos de redução de ordem, determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

a) $y'' + t(y')^2 = 0$.

b) $yy'' + 2(y')^2 = 0$.

3. Usando métodos de redução de ordem, determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

a) $yy'' = 2(y')^2$.

b) $2t^2 y'' + (y')^3 = 2ty'$.

c) $yy'' + (y')^2 = 0$.

4. Calcule a solução do problema não linear de segunda ordem:

$$y'' = y'y + (y')^2 \quad \text{com} \quad y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y'(0) = -1.$$

5. Calcule a solução do problema não linear de segunda ordem:

$$y'' = 2y'y \quad \text{com} \quad y(0) = 1 \quad \text{e} \quad y'(0) = 2.$$

6. Determine os valores de λ para os quais os seguintes problemas de valores fronteira têm soluções não triviais:

a) $y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$

b) $y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi).$

7. Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t \geq 0$ e para $x \in [0, 1]$ de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u & \text{se } x \in]0, 1[\\ u(0, t) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(1, t) = 0 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x, 0) = 3 \sin(2\pi x) - 7 \sin(4\pi x).$$

8. Determine a solução dos seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad x \in]0, \pi[, \quad \text{com} \begin{cases} u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = \sin(x) - 2 \sin(5x). \end{cases}$$

9. Determine a solução dos seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = u_{xx} - u, \quad x \in]0, L[, \quad \text{com} \begin{cases} u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = \cos(3\pi x/L). \end{cases}$$

10. Determine a solução dos seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = u_{xx} - u, \quad x \in]0, 1[, \quad \text{com} \begin{cases} u(0, t) = u(1, t) \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) \\ u(x, 0) = 3 \cos(6\pi x) - 5 \sin(8\pi x). \end{cases}$$