

Análise Matemática IV

LEAN, LEBI, LEQ, LQ

2º Semestre de 2003/04

Problemas para a aula prática

12ª Semana

1. Determine a solução geral da seguinte equação diferencial

$$x'' - 2x' + x = 5e^t \log t$$

2. Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$x'' + x = \sec t \quad , \quad \text{com } x(0) = x'(0) = 0.$$

3. Designado por $\mathcal{L}(f(t))(s)$ a função de variável s que é a transformada de Laplace de uma certa função $f(t)$, prove a seguinte identidade

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s - a).$$

4. Calcule as transformadas de Laplace (indicando o seu domínio) das funções definidas em $t \geq 0$ pelas expressões seguintes

a) $f(t) = \cosh(at)$.

b) $f(t) = t^2 \sin at$.

c) $f(t) = e^{at} \cos bt$.

5. Usando propriedades conhecidas da transformada de Laplace, calcule a transformada (indicando o seu domínio) da seguinte função

$$f(t) = \frac{\sin(t)}{t}, \quad (t > 0).$$

6. Calcule a inversa de transformada de Laplace de

a) $(s^2 - 1)^{-2}$.

b) $6(s^4 + 10s^2 + 9)^{-1}$.

c) $2s(s^4 + 1)^{-1}$.

7. Utilizando a transformada de Laplace resolva os seguintes problemas de valor inicial:

a) $y'' - y' - 6y = 0$, com $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$.

b) $y'' + \omega^2 y = \cos 2t$, $\omega^2 \neq 4$, com $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

c) $y'' - 3y' + 2y = 0$, com $y(3) = 5$ e $y'(3) = 7$.

8. Utilizando a transformada de Laplace resolva os seguintes problemas de valor inicial:

a) $y'' + 2y' + 2y = h(t)$, com $y(0) = y'(0) = 0$, onde $h(t) = \begin{cases} 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & 0 \leq t < \pi \text{ ou } t \geq 2\pi \end{cases}$.

b) $y'' - 2y' + y = e^t H_3(t)$, com $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$, onde $H_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 3 \\ 1 & \text{se } t > 3 \end{cases}$.

c) $y''' - y' = \begin{cases} e^t, & \text{se } t < 2 \\ -e^{-t+4}, & \text{se } t > 2 \end{cases}$, com $y(0) = 3$, $y'(0) = y''(0) = 0$.

9. Designa-se por δ a função de Dirac com suporte na origem. Utilizando a transformada de Laplace resolva os seguintes problemas de valor inicial:

a) $y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,

b) $y'' + 4y = \delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

c) $y''' - 3y'' + 3y' - y = \delta(t - 1)$, com $y(0) = 0$, $y'(0) = y''(0) = 1$.

10. Seja a uma constante complexa, n um numero natural e $f(t) = t^n e^{at}$, definida para $t \geq 0$. Calcule a Transformada de Laplace de f , (designada por $\mathcal{L}(f)$), e verifique que:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{zt} \mathcal{L}(f)(z) dz, \quad \forall t > 0,$$

onde C é um contorno fechado apropriado.