

# Análise Matemática IV

LEAN, LEBI, LEQ, LQ

2º Semestre de 2003/04

Problemas para a aula prática

## 6ª Semana

1. Utilize o Teorema dos Resíduos para obter os seguintes valores:

a)  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin^2 \theta} = \pi \sqrt{\frac{2}{3}}$

b)  $\int_0^\pi \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{2} + \cos(\theta)} d\theta = -\frac{\pi}{\sqrt{2} + 1}.$

c)  $\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{(5 - 4\cos(\theta))^2} d\theta = \frac{7}{54}\pi$  ( Sugestão:  $\cos(3\theta) = \text{Re}(e^{i3\theta})$  )

2. Estabeleça, através do Teorema dos Resíduos e mediante a escolha de um contorno de integração adequado, os seguintes resultados:

a)  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{1}{12}\pi$

b)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6 + 1} = \frac{2}{3}\pi$

c)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 9)^2} dx = \frac{\pi}{54}$

3. Com base no Teorema dos Resíduos e no Lema de Jordan, obtenha os seguintes resultados:

a)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sen x}{(x^2 + 1)} dx = \frac{\pi}{e}$

b)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\sqrt{2}\pi x)}{x^4 + 1} dx = \frac{-\pi}{\sqrt{2}e^\pi}$

c)  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{2e}$

4. Utilize o Teorema dos Resíduos para calcular

$$\oint_C \frac{z^4 + 1}{z^2 (2z^2 + 5z + 2)} dz,$$

onde  $C$  é a curva  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  percorrida no sentido positivo. Aproveite este resultado para calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{5 + 4\cos(\theta)} d\theta.$$

5. Utilizando o Teorema dos resíduos, calcule

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx,$$

onde  $n$  é um natural maior ou igual que 2.

**Sugestão:** Considere a fronteira da região  $\{z = \rho e^{i\theta} : \rho \in ]0, R[, \theta \in ]0, \frac{2\pi}{n}[ \}$ , com  $R > 1$ .

6. Determine o desenvolvimento em série de Laurent na região  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  da função

$$g(z) = (z - z^3) e^{\frac{1}{z}},$$

e calcule

$$\oint_C \left( \frac{1}{z-4} + (z - z^3) e^{\frac{1}{z}} \right) dz,$$

onde  $C$  é a curva  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$  percorrida no sentido positivo.

7. Considere a função  $f(z) = \frac{2z+1}{\sin(2\pi z)} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(i8)^n} z^{3n-4}$ .

a) Determine o interior da região de convergência da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(i8)^n} z^{3n-4}$ .

b) Indique e classifique as singularidades da função  $f(z)$  situadas no círculo  $|z| < 1$ .

c) Calcule os resíduos de  $f(z)$  nestas singularidades.

d) Indique os possíveis valores para o integral de  $f$  ao longo de curvas fechadas simples seccionalmente regulares contidas no círculo  $|z| < 1$ .

8. Seja  $f(z) = \frac{z \sin(z)}{\cos(z) - 1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k (z - 4i)^{k-1}}$ , e  $D(f)$  o seu domínio de definição.

a) Determine o desenvolvimento em série de Taylor da função  $z \sin(z)$  em potências de  $z - 2\pi$ .

b) Determine o interior da região de convergência da série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k (z - 4i)^{k-1}}$ .

c) Classifique, justificando, as singularidades de  $f$  e determine os respectivos resíduos.

9. Seja  $f$  uma função complexa de variável complexa. Mostre que se

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (n+1) \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{f^{(n+1)}(z_0)} \right| \right)$$

existir e for finito, então  $f$  tem uma singularidade não removível num ponto  $z$  tal que  $|z - z_0| = L$ .