

Análise Matemática IV

LEAN, LEBI, LEQ, LQ

2º Semestre de 2003/04

Problemas para a aula prática

4ª Semana

1. Considere o caminho γ_1 que consiste no segmento de recta unindo o ponto inicial 0 ao ponto final $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$, e considere também o caminho γ_2 entre esses mesmos pontos dado pela parábola $t \mapsto t + it^2$.

a) Calcule, utilizando a definição, $\int_{\gamma_k} z^2 dz$, com $k = 1, 2$.

b) Calcule $\int_{\gamma_k} z \bar{z} dz$ com $k = 1, 2$.

c) Comente os resultados que obteve nas alíneas anteriores.

2. Seja

$$f(z) = z^{-1+i} = \exp[(-1+i)\log z] \quad , \quad |z| > 0 \text{ e } 0 < \arg z < 2\pi$$

Calcule

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz$$

onde a curva $|z| = 1$ é percorrida no sentido positivo.

3. Seja $\gamma(t) = Re^{it}$ para $0 \leq t \leq \pi$. Mostre que se $R > 2$, então

$$\left| \int_{\gamma} \frac{2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4} dz \right| \leq \pi \frac{R(2R^2 + 1)}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)}$$

4. Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ a elipse $|z - i| + |z - 2i| = 2$, percorrida no sentido positivo. Calcule

a) $\oint_{\Gamma} z^5 e^{z^2 \cos^2 z} dz$

b) $\oint_{\Gamma} \frac{z^5 e^{z^2 \cos^2 z}}{2z - i\pi} dz$

c) $\oint_{\Gamma} \frac{1}{z^2 (z - i)^3} dz$

d) $\oint_{\Gamma} \frac{\cos z}{(z - i)^{11}} dz$

5. Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ a circunferência $|z + i| = 1$, percorrida no sentido positivo. Calcule o valor do integral

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z + i)^3} dz,$$

onde função $f(z)$ é uma função analítica determinada por

$$\operatorname{Re} f(x + iy) = e^y \cos x.$$

6. Considere a seguinte função $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$u(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy(x + y)$$

- a) Mostre que u é uma função harmônica.
- b) Determine a função harmônica conjugada v tal que $v(0, 0) = 0$.
- c) Calcule

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz,$$

onde $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ e C é a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ percorrida no sentido positivo.

7. Considere a função $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida pela fórmula $u(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy$, onde α , β e γ são constantes reais.

- a) Determine α , β e γ de modo a que u seja a parte real de uma função analítica f que satisfaz a igualdade:

$$f''(i-1) = 1 + i.$$

- b) Utilizando uma função f com as propriedades impostas na alínea anterior calcule os integrais

$$\text{i-} \quad \oint_C \frac{f'(z)}{z(z+i)} dz \quad \text{ii-} \quad \oint_C \frac{f(iz)}{(z-1-i)^3} dz$$

onde C designa a elipse $|z-1| + |z-i| = 3$ percorrida uma vez no sentido positivo.

8. Considere a função $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(z) = z(z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2)$, e sejam u e v funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ tais que $u(x, y) = \operatorname{Re}[g(x + iy)]$ e $v(x, y) = \operatorname{Im}[g(x + iy)]$.

- a) Determine o conjunto dos pontos onde u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann. O que pode concluir sobre a analiticidade da função g ?
- b) Mostre que u é uma função harmônica.
- c) Determine uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, analítica em $\mathbb{C}$, tal que $\operatorname{Re}(f) = u$.

9. Para que valores de z é a série $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^n$ convergente?

10. Determine o interior da região de convergência das seguintes séries de potências:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z-i)^n}{n^4+1} \quad \text{b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^n} (z+1-i)^n$$

$$\text{c)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (z+1)^n \quad \text{d)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^n z^{n^2}$$

$$\text{e)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^{2n}}{(n!)^2} \quad \text{f)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} 5^n (3z+2i)^{2^n}$$