

Análise Matemática IV

LEAN, LEBI, LEQ, LQ

2º Semestre de 2003/04

Problemas para a aula prática

2ª Semana

1. Esboce os seguintes conjuntos no plano complexo:

- a) $\{z \in \mathbb{C} : |z|^2 = z^2\}$.
- b) $\{z \in \mathbb{C} : z^{-1} = \bar{z}\}$.
- c) $\{z \in \mathbb{C} : z = 2 + i + 2e^{i\theta}, \quad -\pi \leq \theta < \pi\}$.
- d) $\{z \in \mathbb{C} : z = -1 - 2i + (3 + 4i)t, \quad t \in [1, +\infty[\}$

2. Seja $z = \rho e^{i\theta}$, com $\rho \in \mathbb{R}^+$ e $\theta \in \mathbb{R}$. Escreva em termos de ρ e θ o módulo e o argumento das seguintes expressões:

$$\bar{z}; \quad |z|; \quad -z; \quad z^3; \quad \operatorname{Re}(z); \quad \operatorname{Im}(z).$$

3. Resolva a equação

$$z^3 - 2z^2 + 2z - 1 = 0$$

e apresente as três raízes na forma $re^{i\theta}$.

4. Escreva os seguintes números complexos sob a forma polar:

- a) $\sqrt{2}$.
- b) -2 .
- c) $3 + i\sqrt{3}$.
- d) $(3 + i\sqrt{3})^n, \quad n \in \mathbb{N}$.

5. Descreva geometricamente os números representados pela expressão $\sqrt[6]{1-i}$.

6. Prove a veracidade da seguinte desigualdade para qualquer número complexo z :

$$|z - |z|| \leq |z| |\arg z|.$$

7. Utilizando a fórmula de Moivre, determine expressões para $\cos(4\phi)$ e $\sin(4\phi)$ em termos de $\cos(\phi)$ e $\sin(\phi)$.

8. Utilizando as propriedades da exponencial complexa, deduza as conhecidas expressões para $\cos(\alpha + \beta)$ e $\sin(\alpha + \beta)$ em termos de $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\cos(\beta)$ e $\sin(\beta)$.
9. Determine as partes real e imaginária das seguintes funções de variável complexa, e indique o conjunto dos pontos do plano complexo onde não possuem derivada (no sentido complexo):

a) $x^2 - y^2 + i2xy$

b) $x^2 - y + i(x - y^2)$

c) $|x|(x^2 - 3y^2) + i(3x^2y - y^3)$

d) $e^{-2y}(\cos^2 x - \sin^2 x) + i2e^{-2y} \sin x \cos x$

e) $z(e^{iz} - e^{-iz})$

f) $\frac{1}{z} + \frac{2}{\bar{z}}$

g) $\frac{1}{z}$

h) $ze^{\bar{z}}$

i) e^{z^2}

10. Mostre que $f(z) = \sqrt{|\operatorname{Im} z|^2}$ possui, na origem, derivadas parciais que verificam as equações de Cauchy-Riemann, mas que f não possui derivada nesse ponto.

11. Considere a função

$$f(z) = \begin{cases} (\operatorname{Re} z)^2 \sin \frac{1}{(\operatorname{Re} z)^2} & \text{se } \operatorname{Re} z \neq 0 \\ 0 & \text{se } \operatorname{Re} z = 0 \end{cases}$$

ou seja

$$f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{com} \quad u(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad v(x, y) = 0.$$

Mostre que f possui derivada (no sentido complexo) na origem, mas que a derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial x}$ não é contínua nesse ponto.