



ANÁLISE MATEMÁTICA IV

1º Exame do 1º semestre de 03/04

(cursos: LEAM, LEBL, LEQ, LQ)

Data: 2004.01.15, 13h00

Duração: 3h00.

RESOLUÇÃO

1. Considere a função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida pela fórmula

$$f(x + iy) = \alpha x + \beta y + \gamma(x^2 - y^2) + i(\beta x + \alpha y + 2\gamma xy),$$

onde α , β e γ são constantes reais.

a) Determine α , β e γ de modo a que f seja uma função analítica que satisfaz as propriedades:

$$f'(0) = 1 \quad \text{e} \quad f''(0) = 2.$$

b) Utilizando a função com as propriedades impostas na alínea anterior calcule os integrais

i-
$$\oint_C \frac{f(z)}{z^2(z-1)} dz$$

ii-
$$\oint_C \frac{(z+1)f(z)}{z^3} dz$$

onde C designa a elipse $|z| + |z - i| = 2$ percorrida uma vez no sentido positivo.

Resolução:

a) A parte real e a parte imaginária de $f(x + iy)$ são dadas respectivamente por

$$u(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma(x^2 - y^2) \quad \text{e} \quad v(x, y) = \beta x + \alpha y + 2\gamma xy.$$

como f é analítica temos pelas equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha + 2\gamma x = \alpha + 2\gamma x = \frac{\partial v}{\partial y}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \beta - 2\gamma y = -\beta - 2\gamma y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Desta última equação obtemos $\beta = 0$.

Da condição $f'(0) = 1$, obtemos então

$$f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) = \alpha + i\beta = 1,$$

donde $\alpha = 1$.

Finalmente da condição $f''(0) = 2$, vem

$$f''(0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,0) + i \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0,0) = 2\gamma = 2.$$

Portanto $\gamma = 1$ e

$$f(x + iy) = x + x^2 - y^2 + i(y + 2xy).$$

b)

- i- Como $|0| + |0 - i| = |i| = 1 < 2$ e $|1| + |1 - i| = 1 + \sqrt{2} > 2$, concluímos que o ponto $z = 0$ encontra-se na região delimitada pela curva C , ao contrário do que acontece com o ponto $z = 1$. Então a função $\frac{f(z)}{(z-1)}$ é analítica na referida região e pelas fórmulas integrais de Cauchy vem

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{f(z)}{z^2(z-1)} dz &= 2\pi i \left(\frac{f(z)}{(z-1)} \right)' \Big|_{z=0} \\ &= 2\pi i \left(\frac{f'(z)(z-1) - f(z)}{(z-1)^2} \right) \Big|_{z=0} \\ &= 2\pi i \frac{-f'(0) - f(0)}{1} \\ &= -2\pi i \end{aligned}$$

Onde se utilizaram os valores $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$.

- ii- Uma vez que a função $(z+1)f(z)$ é analítica e $z = 0$ é um ponto interior à região limitada pela curva C , obtemos pelas fórmulas integrais de Cauchy Riemann

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{(z+1)f(z)}{z^3} dz &= \frac{2\pi i}{2!} ((z+1)f(z))'' \Big|_{z=0} \\ &= \pi i (f(z) + (z+1)f'(z))' \Big|_{z=0} \\ &= \pi i (2f'(z) + (z+1)f''(z)) \Big|_{z=0} \\ &= \pi i (2f'(0) + f''(0)) \\ &= 4\pi i \end{aligned}$$

2. Considere a função

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - 4z^5}.$$

- a) Determine o desenvolvimento de f em série de Laurent em torno do ponto $z = 0$ e convergente na região $|z| < \frac{1}{2}$.
- b) Calcule o integral $\oint_C f(z) dz$, onde C é a circunferência $|z - 1 - i| = \frac{3}{2}$ percorrida uma vez no sentido positivo.

Resolução:

a) Como $|z| < \frac{1}{2}$, vem $|4z^2| < 1$. Então :

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^3 - 4z^5} &= \frac{1}{z^3} \frac{1}{1 - 4z^2} \\ &= \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{+\infty} (4z^2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} 4^n z^{2n-3} \\ &= \frac{1}{z^3} + \frac{4}{z} + 4^2 z + 4^3 z^3 + \dots\end{aligned}$$

que é o desenvolvimento de f em série de Laurent em torno do ponto $z = 0$ e convergente na região $|z| < \frac{1}{2}$.

b) Temos

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{z^3 - 4z^5} = \frac{1}{z^3(1 - 4z^2)} \\ &= \frac{1}{z^3(1 - 2z)(1 + 2z)}.\end{aligned}$$

Pelo que $f(z)$ é uma função analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\}$. Como

$$|0 - 1 - i| = \sqrt{2} < \frac{3}{2}$$

$$\left| \frac{1}{2} - 1 - i \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2} < \frac{3}{2}$$

$$\left| -\frac{1}{2} - 1 - i \right| = \sqrt{\frac{9}{4} + 1} = \frac{\sqrt{13}}{2} > \frac{3}{2}$$

concluimos que apenas as singularidades $z = 0$ e $z = \frac{1}{2}$ se encontram na região delimitada pela curva C . Então pelo teorema dos resíduos vem

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\frac{1}{2}} f(z) \right)$$

De acordo com alínea anterior temos $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 4$. Por outro lado

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \left(z - \frac{1}{2} \right) f(z) &= \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{z - \frac{1}{2}}{z^3(1 - 4z^2)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{z - \frac{1}{2}}{(1 - 4z^2)} \\ &= 2^3 \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{-8z} = 2^3 \frac{1}{-4} \\ &= -2\end{aligned}$$

Portanto $z = \frac{1}{2}$ é um pólo de primeira ordem de $f(z)$ e $\operatorname{Res}_{z=\frac{1}{2}} f(z) = -2$. Donde

$$\oint_C f(z) dz = 4\pi i$$

3. Utilizando o Teorema dos Resíduos, calcule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen}(2x)}{1+x^2} dx.$$

Resolução:

Temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen}(2x)}{1+x^2} dx &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{x \operatorname{sen}(2x)}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \operatorname{Im} \int_{-R}^R \frac{x e^{i2x}}{1+x^2} dx \\ &= \operatorname{Im} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{I_R} \frac{z e^{i2z}}{1+z^2} dz \end{aligned}$$

onde o segmento $I_R = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0 \text{ e } |\operatorname{Re} z| \leq R\}$ é orientado do ponto $z = -R$ para o ponto $z = R$.

Considerando a semicircunferência $C_R = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0 \text{ e } |\operatorname{Re} z| = R\}$ orientada do $z = R$ para o ponto $z = -R$, e Γ_R a concatenação das curvas I_R e C_R , obtemos

$$\int_{I_R} \frac{z e^{i2z}}{1+z^2} dz = \oint_{\Gamma_R} \frac{z e^{i2z}}{1+z^2} dz - \int_{C_R} \frac{z e^{i2z}}{1+z^2} dz.$$

Como $2 > 0$ e $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{z}{1+z^2} = 0$, concluímos pelo Lema de Jordan que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} \frac{z e^{i2z}}{1+z^2} dz = 0.$$

Por outro lado, para $R > 1$ temos pelo teorema dos resíduos

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{z e^{i2z}}{1+z^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{z e^{i2z}}{1+z^2},$$

uma vez que a curva Γ_R é fechada e percorrida no sentido positivo e a penas a singularidade $z = i$ se encontra na região delimitada pela curva Γ_R . Como

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=i} \frac{z e^{i2z}}{1+z^2} &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z-i) z e^{i2z}}{1+z^2} = i e^{-2} \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z-i)}{1+z^2} \\ &= i e^{-2} \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{2z} \\ &= \frac{e^{-2}}{2} \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen}(2x)}{1+x^2} dx &= \operatorname{Im} \left(2\pi i \frac{e^{-2}}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{e^2}\end{aligned}$$

4. Calcule as soluções dos seguintes problemas de valor inicial:

- a) $y' + \frac{y}{t} = e^{-t^2}$, com $y(1) = 0$.
b) $ty^2 + ((1+t^2)y - 1)y' = 0$, com $y(0) = 2$.

Resolução:

- a) Os factores de integração desta equação satisfazem $\mu' = \frac{1}{t}\mu$. Tomemos por exemplo $\mu = t$.

De facto, multiplicando a equação dada por t obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned}ty' + y &= te^{-t^2} \\ (ty)' &= te^{-t^2} \\ ty &= \frac{-1}{2}e^{-t^2} + c.\end{aligned}$$

Calculando a constante c através da condição inicial $y(1) = 0$, temos

$$0 = \frac{-1}{2}e^{-1} + c \quad \text{ou seja} \quad c = \frac{e^{-1}}{2}.$$

Portanto

$$y(t) = \frac{e^{-1} - e^{-t^2}}{2t}$$

- b) Designando

$$M = ty^2 \quad \text{e} \quad N = (1+t^2)y - 1,$$

temos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2ty = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Pelo que a equação é exacta. Determinemos então o potencial ϕ tal que $M = \frac{\partial \phi}{\partial t}$ e $N = \frac{\partial \phi}{\partial y}$. Temos

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = (1+t^2)y - 1$$

donde

$$\phi = \frac{1}{2}(1+t^2)y^2 - y + c(t).$$

Então

$$ty^2 = M = \frac{\partial \phi}{\partial t} = ty + c'(t),$$

pelo que $c'(t) = 0$, ou seja $c(t)$ é uma constante. Tomando esta constante igual a zero vem

$$\phi = \frac{1}{2} (1 + t^2) y^2 - y.$$

Então a solução pretendida é dada implicitamente por $\phi(t, y) = \phi(0, 2)$

$$\frac{1}{2} (1 + t^2) y^2 - y = 0.$$

Como $y(0) = 2 \neq 0$ temos (numa vizinhança da condição inicial)

$$(1 + t^2) y - 2 = 0,$$

donde obtemos a explicitação da solução:

$$y(t) = \frac{2}{1 + t^2}.$$

5. Determine a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 2x + 6e^t \end{cases}$$

com a condição inicial $x(0) = y(0) = 0$.

Resolução:

Derivando a primeira equação obtemos $x'' = x' + y'$. Substituindo y' pela segunda equação obtemos

$$x'' = x' + 2x + 6e^t,$$

que é uma equação linear de segunda ordem. O polinómio característico da parte homogénea desta equação é

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2).$$

Por outro lado $6e^t$ é solução de uma equação homogénea com polinómio característico $\lambda - 1$. Então x é solução de uma equação homogénea com polinómio característico $(\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 1)$, pelo que

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + \alpha e^t.$$

Donde

$$\begin{aligned} x'' - x' - 2x &= (\alpha e^t)'' - (\alpha e^t)' - 2\alpha e^t \\ &= -2\alpha e^t, \end{aligned}$$

concluindo-se $\alpha = -3$. Então

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - 3e^t$$

e (da primeira equação)

$$\begin{aligned}y &= x' - x \\&= -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} - 3e^t - (c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - 3e^t) \\&= -2c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}.\end{aligned}$$

Usando agora as condições iniciais obtemos o sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 - 3 = 0 \\ -2c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

donde se obtém $c_1 = 1$ e $c_2 = 2$. Portanto a solução do problema é

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t} + 2e^{2t} - 3e^t \\ y(t) = -2e^{-t} + 2e^{2t} \end{cases}$$

6. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

- a) $y'' - 3y' + 2y = e^t$, com $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$.
- b) $y'' + 2y' + 5y = 0$, com $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$.

Resolução:

- a) O polinómio característico da parte homogénea da equação é

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Por outro lado e^t é solução de uma equação homogénea com polinómio característico $\lambda - 1$. Então y é solução de uma equação homogénea com polinómio característico $(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$, pelo que

$$y = c_1 e^{2t} + c_2 e^t + \alpha t e^t.$$

Donde

$$\begin{aligned}y'' - 3y' + 2y &= (\alpha t e^t)'' - 3(\alpha t e^t)' + 2\alpha t e^t \\&= (\alpha(1+t)e^t)' - 3\alpha(1+t)e^t + 2\alpha t e^t \\&= \alpha(2+t)e^t - 3\alpha e^t - \alpha t e^t \\&= -\alpha e^t\end{aligned}$$

concluindo-se $\alpha = -1$. Então

$$y' = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^t - (1+t)e^t.$$

Usando agora as condições iniciais obtemos o sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 + c_2 - 1 = 1 \end{cases}$$

donde se obtém $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$. Portanto a solução do problema é

$$y = e^{2t} - t e^t$$

b) O polinómio característico da parte homogénea da equação é

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = (\lambda + 1)^2 + 2^2,$$

que tem as raízes complexas conjugadas $\lambda = -1 \pm 2i$. Então

$$y = c_1 e^{-t} \cos 2t + c_2 e^{-t} \sin 2t.$$

Donde

$$0 = y(0) = c_1.$$

Usando este valor obtemos

$$y' = c_2 (-e^{-t} \sin 2t + 2e^{-t} \cos 2t)$$

e

$$2 = y'(0) = 2c_2.$$

Portanto a solução do problema é

$$y = e^{-t} \sin 2t$$

7. Calcule a solução do problema não linear de segunda ordem:

$$y'' = 2y'y \quad \text{com} \quad y(0) = 1 \quad \text{e} \quad y'(0) = 2.$$

Resolução:

$$\begin{aligned} y'' = 2y'y &\Leftrightarrow y'' = (y^2)' \\ &\Leftrightarrow (y' - y^2)' = 0 \\ &\Leftrightarrow y' - y^2 = y'(0) - y(0)^2 = 1 \end{aligned}$$

Portanto $y' = y^2 + 1$, que é uma equação separável:

$$\frac{y'}{y^2 + 1} = 1 \Leftrightarrow \arctg y - \arctg y(0) = t,$$

donde, usando $\arctg 1 = \frac{\pi}{4}$,

$$\arctg y = t + \frac{\pi}{4}$$

e a solução

$$y(t) = \operatorname{tg} \left(t + \frac{\pi}{4} \right)$$

para $t \in]-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$.

8. Utilize o método da separação de variáveis para calcular a solução do problema com condições fronteira e valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \cos t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{para } t > 0 \text{ e } 0 < x < 1 \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & \text{para } t \geq 0 \\ u(0, x) = (1 - x)x & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Resolução:

Procurando soluções separadas de $\frac{\partial u}{\partial t} = \cos t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, com $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$, temos para $u(t, x) = T(t)X(x)$,

$$T'(t)X(x) = \cos t T(t)X''(x), \quad \text{com } X(0) = X(1) = 0.$$

Então

$$X''(x) = \sigma X(x), \quad \text{com } X(0) = X(1) = 0$$

e

$$T'(t) = \sigma \cos t T(t)$$

onde σ é uma constante real. O problema em X só tem soluções não triviais se $\sigma = -n^2\pi^2$ para algum $n \in \mathbb{N}_1$.

De facto se $\sigma = 0$ vem $X(x) = a + bx$, e as condições fronteira impõem $a = b = 0$. Se pelo contrário $\sigma \neq 0$, então as soluções de $X'' - \sigma X = 0$ são $X(x) = ae^{\sqrt{\sigma}x} + be^{-\sqrt{\sigma}x}$; condições fronteira impõem $a = -b$ e (para $a \neq 0$) $e^{2\sqrt{\sigma}} = 1$, ou seja $\sqrt{\sigma} = in\pi$ e $\sigma = -n^2\pi^2$.

Para $\sigma = -n^2\pi^2$ obtemos as soluções

$$X(x) = \sin(n\pi x) \quad \text{e} \quad T(t) = e^{-n^2\pi^2 \sin t}.$$

Fazendo combinações lineares destas soluções separadas $X(x)T(t)$, obtemos a seguinte solução formal, aonde α_n são constantes,

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-n^2\pi^2 \sin t} \sin(n\pi x).$$

Usando agora a condição inicial obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(n\pi x) = (1 - x)x.$$

Pela teoria das séries de Fourier obtemos ($n \in \mathbb{N}_1$)

$$\begin{aligned}
 \alpha_n &= 2 \int_0^1 (1-x) x \operatorname{sen}(n\pi x) dx \\
 &= 2 \left[- (1-x) x \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \right]_0^1 + 2 \int_0^1 (1-2x) \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} dx \\
 &= \frac{2}{n\pi} \left[(1-2x) \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{n\pi} \right]_0^1 + \frac{4}{n\pi} \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{n\pi} dx \\
 &= \frac{4}{n^2\pi^2} \left[\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi} \right]_0^1 \\
 &= \frac{4}{n^3\pi^3} (-(-1)^n + 1).
 \end{aligned}$$

Portanto a solução do problema é

$$u(t, x) = \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3} e^{-n^2\pi^2 \operatorname{sen} t} \operatorname{sen}(n\pi x).$$

9. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial, indicando o respectivo intervalo máximo de definição:

$$y' - 6t^2\sqrt{1-y} = 0, \text{ com } y(0) = 0.$$

Resolução:

Para $y < 1$ temos

$$\frac{y'}{\sqrt{1-y}} = 6t^2,$$

que é uma equação separável. Primitivando vem

$$-2\sqrt{1-y} = 2t^3 + c.$$

Usando a condição inicial $y(0) = 0$, vem $c = -2$. Portanto temos sucessivamente

$$-2\sqrt{1-y} = 2t^3 - 2,$$

$$\sqrt{1-y} = 1 - t^3,$$

$$y = 1 - (1 - t^3)^2.$$

Como os cálculos efectuados são válidos apenas para $y < 1$, concluímos que para $t \in]-\infty, 1[$ a solução é dada por

$$y(t) = 1 - (1 - t^3)^2,$$

visto que $1 - (1 - t^3)^2 < 1$ é equivalente a $(1 - t^3)^2 > 0$ ou seja $t \neq 1$.

Mas então

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} y(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} (1 - (1 - t^3)^2) = 1$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} y'(t) = \lim_{t \rightarrow 1} 6(1 - t^3)t^2 = 0.$$

Por outro lado a função constante igual a 1 é solução da equação $y' - 6t^2\sqrt{1-y} = 0$. Então podemos prolongar a solução local atrás obtida, à solução global do problema proposto através da expressão

$$y(t) = \begin{cases} 1 - (1 - t^3)^2 & \text{se } t \leq 1 \\ 1 & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$

que tem intervalo de definição $\mathbb{R}$.

Note-se que $y' = 6t^2\sqrt{1-y}$ implica $y' \geq 0$, e portanto a solução tem de ser monótona crescente; este facto, e o Teorema de Picard Lindelöf aplicado enquanto $t < 1$, permite-nos garantir que a solução obtida é única.