

Análise Matemática IV

LEQ, LEAm, LQ, LEBI

1º Semestre de 2003/04

Problemas para a aula prática

14ª Semana

1. Calcule a série de Fourier da função $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq x \leq 0, \\ +1 & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

2. Determine a série de Fourier da função $g(x) = L - |x|$, no intervalo $[-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

3. Determine a série de Fourier da função $h(x) = x^2$, no intervalo $x \in [-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. Calcule a série de Fourier da onda sinusoidal rectificada, isto é, de

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } \sin x > 0 \\ 0 & \text{se } \sin x \leq 0 \end{cases}$$

5. Desenvolva a função definida no intervalo $[0, 1]$ por $f(x) = x$ numa série de cossenos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

6. Considere o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u - 2e^x \\ \text{com } u(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad u(\pi, t) = \pi e^\pi \end{cases}$$

- a) Determine uma solução estacionária deste problema.
b) Use a solução obtida na alínea anterior para tornar o problema homogêneo; e recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as suas soluções definidas para $t \geq 0$ e para $x \in [0, \pi]$.
c) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x, 0) = (\pi - x + e^x)x.$$

7. Considere a seguinte equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\cos t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o problema de valor inicial e fronteira, para a equação dada, com as condições

$$\begin{cases} u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & t > 0, \\ u(0, x) = \sin x + 2 \sin x \cos x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

8. Determine a solução do problema de valor inicial e condições de fronteira:

$$u_t = u_{xx} + 2u_x, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times]0, \pi[$$

$$u(t, 0) = 0, u(t, \pi) = 0 \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

$$u(0, x) = e^{-x} (\sin x + \sin 2x) \quad x \in]0, \pi[.$$

9. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 \\ u(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 1 \end{cases}$$

para $t \geq 0$ e para $x \in [0, 1]$, (satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0, 1[$) e onde c é um parâmetro real.

10. Considere a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2 \quad (*)$$

- a) Sejam p e q duas funções de classe $\mathcal{C}^2$ definidas em $\mathbb{R}$. Mostre que a função

$$u(t, x) = p(xe^t) + q(xe^{-t})$$

é solução de (*).

- b) Baseando-se no resultado da alínea anterior determine a solução de (*) que satisfaz as seguintes condições iniciais:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(0, x) = e^{-x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0.$$

11. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{com as condições:} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0 & \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = \cos(2\pi x) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0 & \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = \cos(2\pi y) \\ u(0, 0) = 0 \end{cases}$$

para $x, y \in [0, 1]$.