

Análise Matemática IV

LEQ, LEAm, LQ, LEBI

1º Semestre de 2003/04

Problemas para a aula prática

Teste 11 ^a Semana turma QT

1. Determine a solução geral da equação

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = e^t + \cos t.$$

2. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$y'' - 2y' + y = e^t \sin t \quad \text{com} \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Resolução:

1. O polinómio característico da equação homogénea correspondente é

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (\lambda - 1)^3.$$

Por sua vez a função e^t é solução de uma equação linear homogénea com polinómio característico $(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$. Pelo que as soluções $y(t)$ da equação dada (não homogénea) são soluções de uma equação homogénea com polinómio característico

$$(\lambda - 1)^4 (\lambda^2 + 1).$$

Então

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t + \alpha t^3 e^t + \beta_1 \cos t + \beta_2 \sin t$$

para certas constantes c_1, c_2, c_3 e α, β_1 e β_2 . Designado

$$z(t) = \alpha t^3 e^t + \beta_1 \cos t + \beta_2 \sin t,$$

temos

$$z'(t) = \alpha (t^3 + 3t^2) e^t + \beta_2 \cos t - \beta_1 \sin t,$$

$$z''(t) = \alpha (t^3 + 6t^2 + 6t) e^t - \beta_1 \cos t - \beta_2 \sin t,$$

e

$$z'''(t) = \alpha (t^3 + 9t^2 + 18t + 6) e^t - \beta_2 \cos t + \beta_1 \sin t,$$

Donde

$$\begin{aligned} y''' - 3y'' + 3y' - y &= z''' - 3z'' + 3z' - z \\ &= \alpha [(1 - 3 + 3 - 1)t^3 + (9 - 18 + 9)t^2 + (18 - 18)t + 6] e^t + \\ &\quad + (-\beta_2 + 3\beta_1 + 3\beta_2 - \beta_1) \cos t + (\beta_1 + 3\beta_2 - 3\beta_1 - \beta_2) \sin t \\ &= \alpha 6e^t + (2\beta_1 + 2\beta_2) \cos t + (-2\beta_1 + 2\beta_2) \sin t \end{aligned}$$

Pelo que

$$\alpha 6 = 1 \quad ; \quad 2\beta_1 + 2\beta_2 = 1 \quad ; \quad -2\beta_1 + 2\beta_2 = 0$$

ou seja $\alpha = \frac{1}{6}$, $\beta_1 = \frac{1}{4}$ e $\beta_2 = \frac{1}{4}$. A solução geral pretendida é então dada por

$$c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t + \frac{1}{6} t^3 e^t + \frac{1}{4} \cos t + \frac{1}{4} \sin t$$

onde c_1 , c_2 e c_3 são constantes arbitrárias

2. O polinómio característico da equação homogénea correspondente é

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

Por sua vez a função $e^t \sin t$ é solução de uma equação linear homogénea com polinómio característico $(\lambda - 1)^2 + 1$. Pelo que as soluções $y(t)$ da equação dada (não homogénea) são soluções de uma equação homogénea com polinómio característico

$$(\lambda - 1)^2 ((\lambda - 1)^2 + 1).$$

Então

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + \alpha e^t \cos t + \beta e^t \sin t$$

para certas constantes c_1 , c_2 , α e β . Donde

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 2y &= (\alpha e^t \cos t + \beta e^t \sin t)'' - 2(\alpha e^t \cos t + \beta e^t \sin t)' + \alpha e^t \cos t + \beta e^t \sin t \\ &= ((\alpha + \beta) e^t \cos t + (\beta - \alpha) e^t \sin t)' - 2((\alpha + \beta) e^t \cos t + (\beta - \alpha) e^t \sin t) + \\ &\quad + \alpha e^t \cos t + \beta e^t \sin t \\ &= ((2\beta) e^t \cos t - 2\alpha e^t \sin t) + (-\alpha - 2\beta) e^t \cos t + (-\beta + 2\alpha) e^t \sin t \\ &= -\alpha e^t \cos t - \beta e^t \sin t \end{aligned}$$

Pelo que $\alpha = 0$, $\beta = -1$. Então

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t - e^t \sin t$$

$$y(0) = c_1$$

$$y'(t) = c_1 e^t + c_2 (t + 1) e^t - e^t (\cos t + \sin t)$$

$$y'(0) = c_1 + c_2 - 1$$

e como temos de ter $y(0) = y'(0) = 0$, vem $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$. Obtendo-se

$$\begin{aligned} y(t) &= t - e^t \sin t \\ &= e^t (t - \sin t). \end{aligned}$$