

Análise Matemática IV

LEQ, LEAm, LQ, LEBI

1º Semestre de 2003/04

Problemas para a aula prática

Teste 11 ^a Semana turma QM

1. Determine a solução geral da equação

$$y''' - 3y'' + 7y' - 5y = e^t.$$

2. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$y'' - 2y' + 5y = e^t + e^{-t} \quad \text{com} \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Resolução:

1. O polinómio característico da equação homogénea correspondente é

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 7\lambda - 5 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = (\lambda - 1)((\lambda - 1)^2 + 2^2).$$

Por sua vez a função e^t é solução de uma equação linear homogénea com polinómio característico $\lambda - 1$. Pelo que as soluções $y(t)$ da equação dada (não homogénea) são soluções de uma equação homogénea com polinómio característico

$$(\lambda - 1)^2 ((\lambda - 1)^2 + 2^2).$$

Então

$$y(t) = c_1 e^t \cos 2t + c_2 e^t \sin 2t + c_3 e^t + \alpha t e^t$$

para certas constantes c_1, c_2, c_3 e α . Donde

$$\begin{aligned} y''' - 3y'' + 7y' - 5y &= (\alpha t e^t)''' - 3(\alpha t e^t)'' + 7(\alpha t e^t)' - 5\alpha t e^t \\ &= \alpha \left[((t+1)e^t)'' - 3((t+1)e^t)' + 7(t+1)e^t - 5te^t \right] \\ &= \alpha \left[((t+2)e^t)' - 3(t+2)e^t + (2t+7)e^t \right] \\ &= \alpha \left[(t+3)e^t + (-t+1)e^t \right] \\ &= \alpha 4t \end{aligned}$$

Pelo que $\alpha = \frac{1}{4}$ e c_1, c_2 e c_3 são constantes arbitrárias. A solução geral é então dada por

$$y(t) = c_1 e^t \cos 2t + c_2 e^t \sin 2t + c_3 e^t + \frac{t}{4} e^t$$

2. O polinómio característico da equação homogénea correspondente é

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = (\lambda - 1)^2 + 2^2.$$

Por sua vez a função $e^t + e^{-t}$ é solução de uma equação linear homogénea com polinómio característico $(\lambda - 1)(\lambda + 1)$. Pelo que as soluções $y(t)$ da equação dada (não homogénea) são soluções de uma equação homogénea com polinómio característico

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1)((\lambda - 1)^2 + 2^2).$$

Então

$$y(t) = c_1 e^t \cos 2t + c_2 e^t \sin 2t + \alpha e^t + \beta e^{-t}$$

para certas constantes c_1, c_2, α e β . Donde

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 2y &= (\alpha e^t + \beta e^{-t})'' - 2(\alpha e^t + \beta e^{-t})' + 5(\alpha e^t + \beta e^{-t}) \\ &= (\alpha e^t + \beta e^{-t}) - 2(\alpha e^t - \beta e^{-t}) + 5(\alpha e^t + \beta e^{-t}) \\ &= 4\alpha e^t + 8\beta e^{-t} \end{aligned}$$

Pelo que $\alpha = \frac{1}{5}, \beta = 1$. Então

$$y(t) = c_1 e^t \cos 2t + c_2 e^t \sin 2t + \frac{1}{4} e^t + \frac{1}{8} e^{-t}$$

$$y(0) = c_1 + \frac{3}{8}$$

$$y'(t) = (c_1 + 2c_2) e^t \cos 2t + (c_2 - 2c_1) e^t \sin 2t + \frac{1}{4} e^t - \frac{1}{8} e^{-t}$$

$$y'(0) = c_1 + 2c_2 - \frac{1}{8}$$

e como temos de ter $y(0) = y'(0) = 0$, vem $c_1 = -\frac{3}{8}$ e $c_2 = \frac{1}{4}$. Obtendo-se

$$y(t) = -\frac{3}{8} e^t \cos 2t + \frac{1}{4} e^t \sin 2t + \frac{1}{4} e^t + \frac{1}{8} e^{-t}.$$