

Análise Matemática IV

LEQ, LEAm, LQ, LEBI

1º Semestre de 2003/04

Problemas para a aula prática

10ª Semana

1. Considere as seguintes matrizes:

$$(i) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (ii) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Para cada uma das matrizes $\mathbf{A}$ acima indicadas, responda às seguintes questões:

- Calcule $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$ e $\mathbf{A}^4$.
- Intue uma fórmula para $\mathbf{A}^n$, com $n \in \mathbb{N}$, e demonstre-a pelo princípio de indução matemática.
- Calcule $e^{t\mathbf{A}}$ através da definição (i.e. $e^{t\mathbf{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbf{A}^n$).

2. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine $e^{t\mathbf{A}}$ e resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

4. Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{S}$ duas matrizes $n \times n$, com $\det \mathbf{S} \neq 0$. Mostre que

- $\text{tr } \mathbf{SAS}^{-1} = \text{tr } \mathbf{A}$.
- $\det \mathbf{SAS}^{-1} = \det \mathbf{A}$.
- $\det e^{t\mathbf{A}} = e^{t \text{tr } \mathbf{A}}$.

5. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Determine $e^{t\mathbf{A}}$ e resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$, $\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

6. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

7. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$, $\mathbf{x}(-2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

8. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = -2x + 4y + t^6 \\ y' = -x + 2y + t^5 \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = 1.$$

9. Determine a solução geral do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x' = 14x - 10y + 1 \\ y' = 10x - 2y + 2 \end{cases}$$

Sugestão: Determine primeiro uma solução particular constante.