

Análise Matemática IV

LEQ, LEAm, LQ, LEBI

1º Semestre de 2003/04

Problemas para a aula prática

Teste 8ª Semana turma T

1. Resolva os seguintes problemas de valor inicial e indique justificando o intervalo máximo de definição das soluções obtidas.

a) $y' + \cos t y = \cos t$, com $y(0) = 0$.

b) $y' = -te^{y-t^2}$, com $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$.

Resolução:

a) $y' + \cos t y = \cos t$, com $y(0) = 0$.

Um factor de integração desta equação deve satisfazer a equação $\mu' = \cos t \mu$. Por exemplo $\mu = e^{\sin t}$. Multiplicando a equação dada por este factor obtemos

$$y' e^{\sin t} + \cos t e^{\sin t} y = \cos t e^{\sin t},$$

que é equivalente a

$$(y e^{\sin t})' = \cos t e^{\sin t}.$$

Portanto

$$y(t) e^{\sin t} = e^{\sin t} + c.$$

Usando a condição $y(0) = 0$, obtemos

$$0 = 1 + c.$$

Portanto a solução é

$$y(t) = 1 - e^{-\sin t}.$$

Como no raciocínio acima indicado não existe nenhuma restrição na variável t , concluímos que o intervalo máximo de definição é $\mathbb{R}$.

b) $y' = -te^{y-t^2}$, com $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$.

Temos uma equação separável equivalente a

$$e^{-y} y' = -te^{-t^2}.$$

Donde

$$-e^{-y} = \frac{1}{2}e^{-t^2} + c.$$

Usando a condição $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$, obtemos

$$-1 = 0 + c.$$

Portanto, temos sucessivamente

$$-e^{-y} = \frac{1}{2}e^{-t^2} - 1,$$

$$-y = \log \left(1 - \frac{1}{2}e^{-t^2} \right)$$

e a solução explícita

$$y(t) = -\log \left(1 - \frac{1}{2}e^{-t^2} \right).$$

Uma vez que

$$1 - \frac{1}{2}e^{-t^2} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0,$$

concluimos que o intervalo máximo de definição é $\mathbb{R}$.