

Análise Matemática IV

LEQ, LEAm, LQ, LEBI

1º Semestre de 2003/04

Problemas para a aula prática

Teste 8ª Semana turma QT

1. Resolva os seguintes problemas de valor inicial. Indique justificando o intervalo máximo de definição das soluções obtidas.

a) $y' + \frac{1}{1+t^2} y = \frac{-1}{1+t^2}$, com $y(0) = 2$.

b) $y' = \frac{te^{-t^2}}{\cos y}$, com $y(0) = -\pi$.

Resolução:

a) $y' + \frac{1}{1+t^2} y = \frac{-1}{1+t^2}$, com $y(0) = 2$.

Um factor de integração desta equação deve satisfazer a equação $\mu' = \frac{1}{1+t^2} \mu$. Por exemplo $\mu = e^{\arctg t}$. Multiplicando a equação dada por este factor obtemos

$$y' e^{\arctg t} + \frac{e^{\arctg t}}{1+t^2} y = \frac{-e^{\arctg t}}{1+t^2},$$

que é equivalente a

$$(y e^{\arctg t})' = \frac{-e^{\arctg t}}{1+t^2}.$$

Portanto

$$y(t) e^{\arctg t} = -e^{\arctg t} + c.$$

Usando a condição $y(0) = 2$, obtemos

$$2 = -1 + c.$$

Portanto a solução é

$$y(t) = -1 + 3e^{-\arctg t}.$$

Como no raciocínio acima indicado não existe nenhuma restrição na variável t , concluímos que o intervalo máximo de definição é $\mathbb{R}$.

b) $y' = \frac{te^{-t^2}}{\cos y}$, com $y(0) = -\pi$.

Temos uma equação separável equivalente a (enquanto $\cos y(t) \neq 0$)

$$\cos y y' = te^{-t^2}.$$

Donde

$$\sin y = \frac{-1}{2}e^{-t^2} + c.$$

Usando a condição $y(0) = -\pi$, obtemos

$$0 = \sin(-\pi) = \frac{-1}{2} + c.$$

Portanto $\sin y = \frac{-1}{2}e^{-t^2} + \frac{1}{2}$. Invertendo a função $\sin$ numa vizinhança do ponto $-\pi$, chegamos à solução explícita

$$y(t) = -\pi - \arcsen\left(\frac{1 - e^{-t^2}}{2}\right).$$

Como

$$-1 < 0 \leq \frac{1 - e^{-t^2}}{2} < \frac{1}{2} < 1,$$

concluimos que o intervalo máximo de definição é $\mathbb{R}$.