

Análise Matemática IV

LEQ, LEAm, LQ, LEBI

1º Semestre de 2003/04

Problemas para a aula prática

Teste 8ª Semana turma QM

1. Resolva os seguintes problemas de valor inicial. Indique justificando o intervalo máximo de definição das soluções obtidas.

a) $y' + e^t y = e^t$, com $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$.

b) $y' = e^t \cos^2 y$, com $y(0) = \pi$.

Resolução:

a) $y' + e^t y = e^t$, com $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$.

Um factor de integração desta equação deve satisfazer a equação $\mu' = e^t \mu$. Por exemplo $\mu = e^{e^t}$. Multiplicando a equação dada por este factor obtemos

$$y' e^{e^t} + e^t e^{e^t} y = e^t e^{e^t},$$

que é equivalente a

$$(y e^{e^t})' = e^t e^{e^t}.$$

Portanto

$$y(t) e^{e^t} = e^{e^t} + c.$$

Usando a condição $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$, obtemos

$$0 = e^0 + c.$$

Portanto a solução é

$$y(t) = 1 - e^{-e^t}.$$

Como no raciocínio acima indicado não existe nenhuma restrição na variável t , concluímos que o intervalo máximo de definição é $\mathbb{R}$.

b) $y' = e^t \cos^2 y$, com $y(0) = \pi$.

Temos uma equação separável equivalente a (enquanto $\cos y(t) \neq 0$)

$$\frac{1}{\cos^2 y} y' = e^t.$$

Donde

$$\operatorname{tg} y = e^t + c.$$

Usando a condição $y(0) = \pi$, obtemos

$$0 = \operatorname{tg} \pi = 1 + c.$$

Portanto $\operatorname{tg} y = e^t - 1$. Invertendo a função tg numa vizinhança do ponto π , chegamos à solução explícita

$$y(t) = \pi + \operatorname{arctg}(e^t - 1).$$

Como no raciocínio acima indicado não existe nenhuma restrição na variável t , concluímos que o intervalo máximo de definição é $\mathbb{R}$.

Note-se que

$$\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{4} = \pi - \operatorname{arctg} 1 \leqslant y(t) < \pi + \lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} t = \frac{3\pi}{2},$$

pelo que $\cos y(t) \neq 0$.