

Análise Matemática IV

LEQ, LEAm, LQ, LEBI

1º Semestre de 2003/04

Problemas para a aula prática

8ª Semana

1. Determine a solução do problema de Cauchy $3t^2 + 4tx + (2x + 2t^2)x' = 0$, $x(0) = -1$, e esclareça qual é o seu intervalo máximo de existência.
2. Determine a constante α para a qual a equação diferencial seguinte é exacta e resolva-a:

$$ty(y + \alpha e^{\alpha t^2 y}) + t^2(y + e^{\alpha t^2 y}) \frac{dy}{dt} = 0 .$$

3. Resolva o seguinte problema de valor inicial e determine o intervalo de definição da solução:

$$\begin{cases} y \cos t + 2(y^2 + \sin t) \frac{dy}{dt} = 0 \\ y(0) = -1 . \end{cases}$$

4. Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} 4yt + 2t + 2t^3 + 2t \sin y + (2 + \cos y) \frac{dy}{dt} = 0 \\ y(0) = 0 . \end{cases}$$

Determine uma equação que define implicitamente a solução $y(t)$ e mostre que o intervalo de definição desta solução é $\mathbb{R}$.

5. Determine a solução dos seguintes problemas de valor inicial indicando o intervalo máximo onde essa solução está definida.
 - a) $ty^2 + 1 + 2t^2 yy' = 0$, $y(1) = -2$.
 - b) $y - 2t^2 + [2ty + t \log(t)] y' = 0$, $y(1) = 2$.

6. A equação diferencial

$$\cosh y + (e^{-t} + e^y) \frac{dy}{dt} = 0$$

admite um factor de integração da forma $\mu(t + y)$, ou seja, um factor μ que só depende da soma das variáveis $t + y$. Determine-o e dê a solução da equação com $y(0) = 0$.

sugestão: A equação diferencial que $\mu = \mu(t + y)$ satisfaz pode ser escrita em termos de uma só variável $v = t + y$.

7. Resolva a equação $y' + y = e^t y^2$. **Sugestão:** faça a mudança de variável $y = 1/u$.
8. Determine a solução geral da equação $ty' = (1+t)y + y^2$. **Sugestão:** faça a mudança de variável $y = tv$.
9. Suponha que temos uma equação diferencial da forma ($a \neq 0$)

$$\frac{dy}{dt} = f(ay + bt + c) ,$$

como, por exemplo, a equação $\frac{dy}{dt} = \sin(y + 2t + 3)$. Como o segundo membro da equação depende apenas de $ay + bt + c$, é natural fazer a substituição $v = ay + bt + c$, ou seja, $y = \frac{v - bt - c}{a}$.

Mostre que esta substituição transforma $\frac{dy}{dt} = f(ay + bt + c)$ na equação equivalente

$$\frac{dv}{dt} = af(v) + b ,$$

que é separável. Aproveite este resultado para resolver a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = -((t+y)^2 + 1) \operatorname{arctg}(t+y) - 1 .$$

10. Resolva o seguinte problema de valor inicial, indicando o intervalo máximo de definição da solução:

$$y' = \frac{e^{-t} \sin t}{4 \cos(ye^t)} - y, \quad \text{com } y(0) = \pi .$$

Sugestão: faça a mudança de variável $y = e^{-t}u$.

11. Determine a solução geral das seguintes equações homogêneas:

a) $2ty \frac{dy}{dt} = 3y^2 - t^2$.

b) $\frac{dy}{dt} = \frac{t+y}{t-y}$.

12. Para cada uma das seguintes equações diferenciais, esboce o campo de direcções e trace os respectivos tipos de soluções.

a) $y' = t^2 - y^2$.

b) $y' = (2-y)(y-1)$.

c) $y' = \sin(y-t)$

d) $y' = \frac{ty}{1+t^2}$