

# Análise Matemática IV

LEQ, LEAm, LQ, LEBI

1º Semestre de 2003/04

Problemas para a aula prática

## 6ª Semana

1. Determine e classifique as singularidades das seguintes funções. Calcule os resíduos correspondentes.

a)  $f_1(z) = \frac{1 - \cos z}{z - \pi}.$

b)  $f_2(z) = \frac{z}{(z^2 + 2)^2}.$

c)  $f_3(z) = \frac{1}{z^7(1 - z^2)}.$

d)  $f_4(z) = \frac{z \operatorname{sen} z}{(z - \pi)^6}.$

e)  $f_5(z) = z^2 \exp \frac{1}{z}.$

f)  $f_6(z) = \frac{1 - \cos z}{z \operatorname{sen} z}.$

g)  $f_7(z) = \frac{z - \pi/2}{\cos z}.$

2. Justifique que a função

$$g(z) = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{z}}$$

tem uma singularidade em  $z = 0$  que **não é isolada**.

3. Utilize o Teorema dos Resíduos para calcular (considere sempre as curvas indicadas percorridas uma vez no sentido positivo)

a)  $\oint_{|z+1+i|=2} \frac{\operatorname{sen} z}{(z^2 - 1)} dz.$

b)  $\oint_{|z|=3} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2(\pi - z)} dz.$

c)  $\oint_{|z|=1} \frac{e^z - 1}{z^3} dz.$

4. Calcule:

$$\oint_C \frac{1}{e^{z^2} - 1} dz,$$

onde  $C$  é a circunferência  $|z| = \sqrt{7}$  percorrida no sentido positivo.

5. Estabeleça, através do Teorema dos Resíduos e mediante a escolha de um contorno de integração adequado, os seguintes resultados:

a)  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin^2 \theta} = \pi \sqrt{\frac{2}{3}}$

b)  $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(3\theta)}{5 - 4 \cos(2\theta)} d\theta = \frac{3\pi}{8}$

(sugestão: mostre que  $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(3\theta)}{5 - 4 \cos(2\theta)} d\theta = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{i3\theta}}{5 - 4 \cos(\theta)} d\theta$ )

c)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)} dx = \frac{(3 - \sqrt{3})\pi}{6}$

d)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6 + 1} = \frac{2}{3}\pi$

e)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)} dx = \frac{\pi}{e}$

f)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\sqrt{2}\pi x)}{x^4 + 1} dx = -\frac{\pi e^{-\pi}}{\sqrt{2}}$

6. Considere a função  $f(z) = \frac{2z + 1}{\sin(2\pi z)} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(i8)^n} z^{3n-4}$ .

a) Determine o interior da região de convergência da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(i8)^n} z^{3n-4}$ .

b) Indique e classifique as singularidades da função  $f(z)$  situadas no círculo  $|z| < 1$ .

c) Calcule os resíduos de  $f(z)$  nestas singularidades.

d) Indique os possíveis valores para o integral de  $f$  ao longo de curvas fechadas simples seccionalmente regulares contidas no círculo  $|z| < 1$ .

7. Utilizando o Teorema dos resíduos, calcule

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^n} dx,$$

onde  $n$  é um natural maior ou igual que 2. **Sugestão:** Considere a fronteira da região

$$\{z = \rho e^{i\theta} : \rho \in ]0, R[, \theta \in ]0, \frac{2\pi}{n}[\},$$

com  $R > 1$ .