

Análise Matemática IV

LEQ, LEAm, LQ, LEBI

1º Semestre de 2003/04

Problemas para a aula prática

5ª Semana

1. Para que valores de z é a série $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^n$ convergente?

2. Determine o interior da região de convergência das seguintes séries de potências:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z - i)^n}{n^4 + 1}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^n} (z + 1 - i)^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (z + 1)^n$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^{n^2}$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + 1)^{2n}}{(n!)^2}$

3. Considere a seguinte série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad \text{onde} \quad a_n = \begin{cases} 2^n & \text{se } n \text{ par} \\ 3^n & \text{se } n \text{ impar} \end{cases}.$$

Determine o seu raio de convergência.

Sabendo que esta é a série de Maclaurin de uma função f , analítica em todo o seu domínio aberto e conexo, calcule $f(1)$.

4. Determine os desenvolvimentos de Taylor das seguintes funções em torno dos pontos indicados:

a) $\sin z$, em torno de $z = \pi$.

b) e^z , em torno de $z = i2\pi$.

c) $z^2 e^z$, em torno de $z = 1$.

5. Para cada função e região indicadas, determine os desenvolvimentos de Laurent:

- a) $\frac{1}{z-1}$, na região $|z| > 1$.
- b) $z^5 \left(e^{\frac{1}{z}} + z \right)$, na região $|z| > 0$.
- c) $\frac{z-i}{(z-2i)^2}$, na região $|z-i| > 1$.
- d) $(3z^2 - 1) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi z^3 + z}{z^3} \right)$, na região $|z| > 0$.

6. Integre a série de Maclaurin de $f(s) = 1/(1+s^2)$ sobre uma curva interior ao círculo de convergência, desde $s = 0$ até $s = z$, de modo a obter a representação ¹

$$\operatorname{arctg} z = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1}. \quad (|z| < 1).$$

7. Mostre que a função ¹

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg} z}{z} & \text{se } z \neq 0 \\ 1 & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

é analítica no domínio $|z| < 1$. Qual a sua série de Maclaurin? (Sug.: compare com o problema anterior.)

8. Considere a função $f(z) = \frac{e^z}{\sin^2 z}$. Sem calcular os respectivos coeficientes, indique justificadamente qual o raio de convergência do desenvolvimento de f em série de potências de $z - 2$.

9. Determine a série de Laurent de $\frac{1}{(z^2 - 1)^2}$ nas seguintes regiões:

- a) $0 < |z - 1| < 2$.
- b) $2 < |z - 1|$.

e aproveite os resultados para calcular os seguintes integrais:

$$\text{a) } \oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2 - 1)^2} dz; \quad \text{b) } \oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z^2 - 1)^2} dz.$$

10. Calcule

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{((z-i)^2 + (z-i) - 6)(z-i)^{20}} dz.$$

Sugestão: Considere $\xi = z - i$ e desenvolva $\frac{1}{\xi^2 + \xi - 6}$ em série de potências de ξ .

¹Considere um ramo tal que $\operatorname{arctg} 0 = 0$.