

Análise Matemática IV

LEQ, LEAm, LQ, LEBI

1º Semestre de 2003/04

Problemas para a aula prática

Teste 4ª Semana turma T

1. Determine se a função $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ é harmónica.
2. Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ a circunferência $|z + i| = 1$, percorrida no sentido positivo. Calcule o valor do integral

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z + i)^3} dz,$$

onde função $f(z)$ é uma função analítica determinada por

$$\operatorname{Re} f(x + iy) = e^y \cos x.$$

Resolução:

1. Determine se a função $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ é harmónica.

1ª Resolução: Sabemos que $\log(x + iy) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + i \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, para o ramo principal do logaritmo e para $x > 0$. Como este ramo do logaritmo é uma função analítica em $\operatorname{Re} z > 0$ concluímos que $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ é harmónica no semiplano $x > 0$. Como $\operatorname{arctg} \frac{y}{-x} = -\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, a mesma conclusão ainda é válida no semiplano $x < 0$.

2ª Resolução: Designando $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-2yx}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Como $u \in C^2$ em cada um dos semiplanos $x > 0$ e $x < 0$, e $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, concluímos que $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ é harmónica em cada um dos referidos semiplanos.

2. Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ a circunferência $|z + i| = 1$, percorrida no sentido positivo. Calcule o valor do integral

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z + i)^3} dz,$$

onde função $f(z)$ é uma função analítica determinada por

$$\operatorname{Re} f(x + iy) = e^y \cos x.$$

1ª Resolução: Como a função f assim obtida é analítica em $\mathbb{C}$ e o ponto $-i$ é interior à região delimitada pela circunferência Γ , podemos aplicar as fórmulas integrais de Cauchy para obter

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z + i)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f^{(2)}(-i).$$

Designando por u a parte real de f , e por v a sua parte imaginária, temos

$$f^{(2)}(x + iy) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + i \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y).$$

Mas usando uma das equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y \partial x}.$$

Donde

$$f^{(2)}(x + iy) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) - i \frac{\partial u}{\partial y \partial x}(x, y).$$

Efectuando os cálculos necessários:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} e^y \cos x = -e^y \sin x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^y \cos x \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y \partial x} = -e^y \sin x,$$

obtemos

$$\begin{aligned} f^{(2)}(-i) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, -1) - i \frac{\partial u}{\partial y \partial x}(0, -1) \\ &= -e^{-1} \cos 0 + i e^{-1} \sin 0 \\ &= -e^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z + i)^3} dz = -\frac{\pi i}{e}.$$

2ª Resolução: Designando por u a parte real de f , e por v a sua parte imaginária, temos pelas equações de Cauchy -Riemann (porque f é analítica)

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} e^y \cos x = -e^y \cos x$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} e^y \cos x = -e^y \sin x.$$

Integrando a primeira equação em ordem a x vem

$$v = -e^y \sin x + c_1(y)$$

para certa função $c_1(y)$. Mas derivando esta expressão em ordem a y e comparando-a com a expressão obtida anteriormente obtemos $c_1'(y) = 0$, ou seja que $c_1(y) = c$ é uma constante. Pelo que

$$v = -e^y \sin x + c,$$

para certo $c \in \mathbb{R}$.

Como a função f assim obtida é analítica em $\mathbb{C}$ e o ponto $-i$ é interior à região delimitada pela circunferência Γ , podemos aplicar as fórmulas integrais de Cauchy para obter

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z+i)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f^{(2)}(-i).$$

Efectuando os cálculos necessários vem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^y \cos x \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^y \sin x$$

$$\begin{aligned} f^{(2)}(-i) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, -1) + i \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0, -1) \\ &= -e^{-1} \cos 0 + i e^{-1} \sin 0 \\ &= -e^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z+i)^3} dz = -\frac{\pi i}{e}.$$