

Análise Matemática IV

LEQ, LEAm, LQ, LEBI

1º Semestre de 2003/04

Problemas para a aula prática

Teste 4ª Semana turma QT

1. Determine para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ a função $(x^2 + y^2)^\alpha$ é harmónica.
2. Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ a circunferência $|z| = 2$, percorrida no sentido positivo. Calcule o valor do integral

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{2z + 2 + i} dz,$$

onde função $f(z)$ é uma função analítica determinada por

$$\operatorname{Re} f(x + iy) = e^{x-y} \cos(x + y) \quad \text{e} \quad f(0) = 1.$$

Resolução:

1. Determine para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ a função $(x^2 + y^2)^\alpha$ é harmónica.

Resolução: Designando $u = (x^2 + y^2)^\alpha$ temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\alpha (x^2 + y^2)^{\alpha-1} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y\alpha (x^2 + y^2)^{\alpha-1},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\alpha (x^2 + y^2)^{\alpha-1} + 4x^2\alpha(\alpha-1)(x^2 + y^2)^{\alpha-2}$$

$$\text{e}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\alpha (x^2 + y^2)^{\alpha-1} + 4y^2\alpha(\alpha-1)(x^2 + y^2)^{\alpha-2}$$

Donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 4\alpha (x^2 + y^2)^{\alpha-1} + 4(x^2 + y^2)\alpha(\alpha-1)(x^2 + y^2)^{\alpha-2} \\ &= 4\alpha(1 + \alpha - 1)(x^2 + y^2)^{\alpha-1} \\ &= 4\alpha^2 (x^2 + y^2)^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Para que se tenha $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ num conjunto aberto, temos de ter $\alpha = 0$. Neste caso $u \equiv 1$ é uma função constante (e portanto é também de classe C^2). Concluimos que u é harmónica sse $\alpha = 0$.

2. Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ a circunferência $|z| = 2$, percorrida no sentido positivo. Calcule o valor do integral

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{2z + 2 + i} dz,$$

onde função $f(z)$ é uma função analítica determinada por

$$\operatorname{Re} f(x + iy) = e^{x-y} \cos(x + y) \quad \text{e} \quad f(0) = 1.$$

Resolução: Designando por u a parte real de f , e por v a sua parte imaginária, temos pelas equações de Cauchy -Riemann (porque f é analítica)

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} e^{x-y} \cos(x + y) = e^{x-y} \cos(x + y) + e^{x-y} \sin(x + y)$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} e^{x-y} \cos(x + y) = e^{x-y} \cos(x + y) - e^{x-y} \sin(x + y).$$

Integrando a primeira equação em ordem a x vem¹

$$v = e^{x-y} \sin(x + y) + c_1(y)$$

para certa função $c_1(y)$. Mas derivando esta expressão em ordem a y e comparando-a com a expressão obtida anteriormente obtemos $c'_1(y) = 0$, ou seja que $c_1(y) = c$ é uma constante. Pelo que

$$v = e^{x-y} \sin(x + y) + c,$$

para certo $c \in \mathbb{R}$. Como $u(0, 0) + iv(0, 0) = f(0) = 1$, vem

$$0 = v(0, 0) = e^0 \sin(0) + c = c.$$

Como a função f assim obtida é analítica em $\mathbb{C}$ e o ponto $-1 - \frac{i}{2}$ é interior à região delimitada pela circunferência Γ (de facto $|-1 - \frac{i}{2}| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} < 2$), podemos aplicar a fórmula integral de Cauchy para obter

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{2z + 2 + i} dz &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z + 1 + \frac{i}{2}} dz \\ &= \frac{1}{2} 2\pi i f\left(-1 - \frac{i}{2}\right). \end{aligned}$$

¹Por simples inspeção; ou primitivando por partes:

$$\int e^{x-y} \sin(x + y) dx = e^{x-y} \sin(x + y) - \int e^{x-y} \cos(x + y) dx$$

donde

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial v}{\partial x} dx &= \int e^{x-y} \cos(x + y) dx + \int e^{x-y} \sin(x + y) dx \\ &= e^{x-y} \sin(x + y) + c_1(y). \end{aligned}$$

Efectuando os cálculos necessários

$$\begin{aligned}f\left(-1-\frac{i}{2}\right) &= u\left(-1,-\frac{1}{2}\right)+iv\left(-1,-\frac{1}{2}\right) \\&= e^{-1+\frac{1}{2}}\cos\left(-1-\frac{1}{2}\right)+ie^{-1+\frac{1}{2}}\operatorname{sen}\left(-1-\frac{1}{2}\right) \\&= e^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{3}{2}\right)-ie^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{2z+2+i}dz &= i\pi e^{-\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{3}{2}\right)-i\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\right)\right] \\&= i\pi e^{-\frac{1}{2}-i\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$