

Análise Matemática IV

LEQ, LEAm, LQ, LEBI

1º Semestre de 2003/04

Problemas para a aula prática

Teste 4ª Semana turma QM

1. Determine para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ a função $\log(x^2 + \alpha y^2)$ é harmónica.
2. Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ a circunferência $|z| = 1$, percorrida no sentido positivo. Calcule o valor do integral

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(2z+i)^2} dz,$$

onde função $f(z)$ é uma função analítica determinada por

$$\operatorname{Re} f(x+iy) = e^{-2y} \cos 2x.$$

Resolução:

1. Determine para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ a função $\log(x^2 + \alpha y^2)$ é harmónica.

Resolução: Designando $u = \log(x^2 + \alpha y^2)$ temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + \alpha y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2\alpha y}{x^2 + \alpha y^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 2 \frac{(x^2 + \alpha y^2) - 2x^2}{(x^2 + \alpha y^2)^2} = 2 \frac{\alpha y^2 - x^2}{(x^2 + \alpha y^2)^2} \\ \text{e} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 2\alpha \frac{(x^2 + \alpha y^2) - 2\alpha y^2}{(x^2 + \alpha y^2)^2} = 2\alpha \frac{x^2 - \alpha y^2}{(x^2 + \alpha y^2)^2}. \end{aligned}$$

Donde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2(1 - \alpha) \frac{\alpha y^2 - x^2}{(x^2 + \alpha y^2)^2}.$$

Para que se tenha $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ num conjunto aberto, temos de ter $\alpha = 1$. Como $u \in C^2$ no conjunto onde está definida, concluímos que u é harmónica sse $\alpha = 1$.

2. Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ a circunferência $|z| = 1$, percorrida no sentido positivo. Calcule o valor do integral

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(2z+i)^2} dz,$$

onde função $f(z)$ é uma função analítica determinada por

$$\operatorname{Re} f(x+iy) = e^{-2y} \cos 2x.$$

1ª Resolução: Como a função f assim obtida é analítica em $\mathbb{C}$ e o ponto $-\frac{i}{2}$ é interior à região delimitada pela circunferência Γ , podemos aplicar as fórmulas integrais de Cauchy para obter

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(2z+i)^2} dz &= \frac{1}{4} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z+\frac{i}{2})^2} dz \\ &= \frac{1}{4} \frac{2\pi i}{1!} f'(-\frac{i}{2}). \end{aligned}$$

Designando por u a parte real de f , e por v a sua parte imaginária, temos

$$f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x,y).$$

Mas usando uma das equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Donde

$$f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x,y).$$

Efectuando os cálculos necessários:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} e^{-2y} \cos 2x = -2e^{-2y} \sin 2x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} e^{-2y} \cos 2x = -2e^{-2y} \cos 2x,$$

obtemos

$$\begin{aligned} f'(-\frac{i}{2}) &= \frac{\partial u}{\partial x} \left(0, -\frac{1}{2}\right) - i \frac{\partial u}{\partial y} \left(0, -\frac{1}{2}\right) \\ &= -2e^1 \sin 0 + i2e^1 \cos 0 \\ &= i2e. \end{aligned}$$

Portanto

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(2z+i)^2} dz = -\pi e.$$

2ª Resolução: Designando por u a parte real de f , e por v a sua parte imaginária, temos pelas equações de Cauchy -Riemann (porque f é analítica)

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} e^{-2y} \cos 2x = 2e^{-2y} \cos 2x$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} e^{-2y} \cos 2x = -2e^{-2y} \sin 2x.$$

Integrando a primeira equação em ordem a x vem

$$v = e^{-2y} \sin 2x + c_1(y)$$

para certa função $c_1(y)$. Mas derivando esta expressão em ordem a y e comparando-a com a expressão obtida anteriormente obtemos $c_1'(y) = 0$, ou seja que $c_1(y) = c$ é uma constante. Pelo que

$$v = e^{-2y} \sin 2x + c,$$

para certo $c \in \mathbb{R}$.

Como a função f assim obtida é analítica em $\mathbb{C}$ e o ponto $-\frac{i}{2}$ é interior à região delimitada pela circunferência Γ , podemos aplicar as fórmulas integrais de Cauchy para obter

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(2z+i)^2} dz &= \frac{1}{4} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z+\frac{i}{2})^2} dz \\ &= \frac{1}{4} \frac{2\pi i}{1!} f'(-\frac{i}{2}). \end{aligned}$$

Efectuando os cálculos necessários vem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2e^{-2y} \sin 2x,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{-2y} \cos 2x,$$

obtemos

$$\begin{aligned} f'(-\frac{i}{2}) &= \frac{\partial u}{\partial x} \left(0, -\frac{1}{2}\right) + i \frac{\partial v}{\partial x} \left(0, -\frac{1}{2}\right) \\ &= -2e^1 \sin 0 + i2e^1 \cos 0 \\ &= i2e. \end{aligned}$$

Portanto

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(2z+i)^2} dz = -\pi e.$$