

Análise Matemática IV

LEQ, LEAm, LQ, LEBI

1º Semestre de 2003/04

Problemas para a aula prática

3ª Semana

1. Considere a função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = (|z|^2 - 2)\bar{z}$.
 - a) Indique o conjunto de pontos do plano complexo onde f é diferenciável no sentido complexo, bem como o seu domínio de analiticidade.
 - b) Mostre que f aplica circunferências centradas na origem e de raio r em circunferências centradas na origem de raio r' . Para que valores de r se tem $r = r'$?
2. Seja f uma função analítica que verifica, num aberto conexo D , $f'(z) = 0$ para todo $z \in D$. Mostre que f é constante em D (sug.: deve mostrar que tanto a parte real como a parte imaginária de f são constantes enquanto funções das variáveis x, y).
3. Estabeleça as seguintes identidades (onde $z = x + iy$):
 - a) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
 - b) $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$
 - c) $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$
 - d) $\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$
 - e) $\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$
 - f) $|\cos z|^2 + |\sin z|^2 = \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y$
4. Utilize as Equações de Cauchy-Riemann na forma polar para verificar que a seguinte função é analítica em todo o seu domínio.

$$h(z) = \rho \log \rho \cos \theta - \rho \theta \sin \theta + i(\rho \log \rho \sin \theta + \rho \theta \cos \theta),$$

com $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$ e $0 < \theta < 2\pi$. Calcule $h'(z)$.

5. Calcule o valor principal (i.e., tomando na função $\log z$ o ângulo correspondente à restrição principal) de:
 - a) $\log(-1)$
 - b) i^i
 - c) $(1 + i)^{1-i}$
 - d) 2^i

6. Determine todas as soluções das seguintes equações:

a) $\cos z = 2$

b) $z^{2i} - 2z^i + 2 = 0$

7. Estabeleça a seguinte fórmula:

$$\operatorname{arcsen} z = -i \log(iz + \sqrt{1 - z^2}).$$

Sug: Use as fórmulas de Euler na relação $\operatorname{sen} w = z$ para determinar e^w em função de z , onde $w = \operatorname{arcsen} z$.

8. Calcule

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} (1 + i2t) e^{t+it^2} dt.$$

Utilizando o resultado anterior indique o valor dos integrais:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} e^t (\cos t^2 - 2t \operatorname{sen} t^2) dt \quad \text{e} \quad \int_0^{\sqrt{\pi}} e^t (2t \cos t^2 + \operatorname{sen} t^2) dt$$

9. Mostre que

$$\left| \int_0^1 \frac{1}{2 \cos t^2 + i2 \operatorname{sen} t^2 - 1} dt \right| \leq 1.$$

10. Considere o caminho

$$\gamma(t) = \begin{cases} t & \text{se } t \in [0, 1] \\ e^{i\frac{\pi}{2}(t-1)} & \text{se } t \in [1, 2] \\ i(3-t) & \text{se } t \in [2, 3] \end{cases}.$$

Usando o ramo principal do logaritmo, calcule o integral

$$\int_0^3 \gamma(t) \log \gamma(t) \gamma'(t) dt.$$

Observação: Este integral é

$$\int_C z \log z dz,$$

onde C é a curva orientada parametrizada pelo caminho $\gamma(t)$.