

Análise Matemática IV

1º Semestre 2002/2003

2º Exame - Todos os cursos salvo LEAm, LEB, LEBm, LEMG, LEQ, LQ
27 de Janeiro de 2003

Duração do exame: 3 h

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(2 val.) 1. Considere a função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica em $\mathbb{C}$ definida por

$$f(x + iy) = u(x, y) + \frac{1}{u(x, y)}i,$$

em que u é uma função de classe C^2 e $u(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que f é constante em $\mathbb{C}$.

(2 val.) 2. Considere a função

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2-4}.$$

Obtenha a série de MacLaurin de f , e indique o seu raio de convergência.

(2 val.) 3. Seja γ a circunferência de centro em 1 e raio $6/5$ percorrida uma vez em sentido directo. Calcule

$$\oint_{\gamma} \left(\frac{1}{z^4-1} + \cos\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z+5} \right) dz.$$

(2 val.) 4. Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(4+x^2)^2} dx$$

Sugestão: Note que $\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{(4+z^2)^2} dz$ converge para 0 quando $R \rightarrow +\infty$, onde o caminho $\Gamma_R = \{|z| = R : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ é percorrido de R a $-R$.

(2 val.) 5. Determine o intervalo máximo de definição da solução do seguinte problema

$$\frac{dy}{dt} = te^{y+t^2} \quad \text{e} \quad y(0) = 0.$$

Volte S. F. F.

(2 val.) **6.** Considere a equação diferencial de primeira ordem

$$3xy + y^2 + (x^2 + xy)y' = 0$$

- (a) Determine a solução geral da equação.
(b) Indique duas soluções diferenciáveis e distintas da equação que verifiquem a condição inicial $y(0) = 0$.

(2 val.) **7.** Considere a equação diferencial linear

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-t} \cos t \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

- a) Determine uma expressão para a solução geral da equação homogênea correspondente a (1).
b) Determine a solução da equação não homogênea (1), que satisfaça a condição inicial $x_1(1) = x_2(1) = x_3(1) = 0$.

(2 val.) **8.** Considere a equação diferencial

$$y'' - \alpha y' - \alpha y = b(t).$$

- a) Determine $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo a que $y_1(t) = e^{-t} \cos t$ seja solução da equação homogênea.
b) Para o valor de α calculado em a) e $b(t) = e^{-2t}$, determine a solução que verifica $y(0) = y'(0) = 1$. (Se não resolveu a) use o valor $\alpha = -1$)

(2 val.) **9.** Determine a série de cossenos da função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida neste intervalo pela expressão

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & \text{se } x \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Explique quais os valores que a série determinada toma nos pontos $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ e $x = 1$.

(2 val.) **10.** Considere a seguinte equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \pi^2 u.$$

Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o problema de valor inicial e fronteira, para a equação dada, com as condições

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0 & t \geq 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) = 0 & t \geq 0, \\ u(0, x) = 1 + \cos(\pi x) & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$