Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

1º Teste

(TODOS EXCEPTO LEC)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 9/11/2002, 11h00
Duração: 1h30.

1. Considere a função complexa definida por

$$f(z) = f(x+iy) = x^2 - y^2 - 2xy + 2y + i\left(x^2 - y^2 + 2xy - 2x\right).$$

Justificando pormenorizadamente a sua resposta, determine o valor do integral $\oint_C \frac{f(z)}{(z-2)^2} dz$, onde $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 4\}$ é percorrida uma vez no sentido directo.

2. Obtenha o desenvolvimento em série de Laurent, convergente se $|z + i| > 2$, da função

$$h(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}.$$

3. Considere as curvas $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ e $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z + 2\pi i| = 1\}$, percorridas uma vez no sentido directo. Calcule, para cada um dos dois casos $k = 1$ e $k = 2$, o valor de

$$\oint_{\gamma_k} g(z)dz,$$

onde g é cada uma das seguintes funções complexas:

(i) $g(z) = \frac{1}{e^z - 1}$, (ii) $g(z) = z^2 \sin(z^{-1})$, (iii) $g(z) = \frac{z - 2i}{z^4 - 4iz^3 - 4z^2}$.

4. *Utilizando* o Teorema dos Resíduos, determine $\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \cos(n\theta)d\theta, \quad n \in \mathbb{Z}$.

5. Determine a solução do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} x' = tx + t \\ x(-1) = 1 \end{cases}$$