

Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

(9^a a 12^a semana)

25 de Novembro de 2002

Semana 9

79. Resolva os sistemas

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

Sugestão: Reduza cada sistema a uma equação escalar em apenas uma variável.

80. Determine uma equação diferencial de 2.^a ordem que tenha como soluções a família dada:

(a) $y(t) = At + Bt^2$,

(b) $y(t) = (A + Bt)e^t$.

81. Considere a equação diferencial $y'' - 2y' + 2y = 0$.

(a) Determine a solução geral da equação .

(b) Esboce as soluções que satisfazem $y(0) = 0$.

(c) Reduza a equação a um sistema de primeira ordem.

82. Determine a solução geral das equações diferenciais:

(a) $y'' + y' - 2y = e^t + \cos(t)$

(b) $y'' - 2y' + y = t$

83. Determine a solução geral das equações diferenciais:

(a) $y'' + y = \cos(t)$

(b) $y''' - y'' + y' - 1 = 0$

84. Determine a solução geral das equações diferenciais:

(a) $y''' - 4y' = 8t - 16\text{sen}(2t)$

(b) $y'' - 3y' + 2y = te^{2t}$

85. Considere uma equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes e com a menor ordem possível que admite as soluções t e $\text{sen}(2t)$. Qual a solução geral dessa equação?

86. Resolva os seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y''' - 4\pi y'' + 3\pi^2 y' = 10\pi^3 \cos(\pi t), \\ y(0) = 4, \quad y'(0) = 4\pi, \quad y''(0) = 7\pi^2. \end{cases}$$

87. Resolva os seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' - 3\pi y' + 2\pi^2 y = \pi^2 e^{\pi t}, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = \pi. \end{cases}$$

88. Calcule as transformadas de Laplace de

(a) $\cosh bt$,

(b) $\sinh bt$,

(c) $e^{at} \cosh bt$,

(d) $e^{at} \sinh bt$,

(e) $\text{sen } bt$,

(f) $\cos bt$,

(g) $e^{at} \cos bt$,

(h) $e^{at} \text{sen } bt$,

onde a e b são números reais. Lembre-se que $\cosh bt = (e^{bt} + e^{-bt})/2$, $\sinh bt = (e^{bt} - e^{-bt})/2$, $\cos bt = (e^{ibt} + e^{-ibt})/2$ e $\text{sen } bt = (e^{ibt} - e^{-ibt})/2i$.

89. Os polinómios de Laguerre são definidos por

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \left(\frac{d}{dt} \right)^n (t^n e^{-t}) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Mostre que $\mathcal{L}[L_n(t)] = (s-1)^n / s^{n+1}$ e

$$t \frac{d^2}{dt^2} L_n + (1-t) \frac{d}{dt} L_n + n L_n = 0.$$

Semana 10

90. Calcule a inversa de transformada de Laplace de

- (a) $(s^2 - 1)^{-2}$,
- (b) $6(s^4 + 10s^2 + 9)^{-1}$,
- (c) $2s(s^4 + 1)^{-1}$,

91. Utilizando a transformada de Laplace resolva os seguintes problemas de valor inicial:

- (a) $y'' - y' - 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.
- (b) $y'' + \omega^2 y = \cos 2t$, $\omega^2 \neq 4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
- (c) $y'' + 2y' + 2y = h(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ e

$$h(t) = \begin{cases} 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & 0 \leq t < \pi \text{ e } t \geq 2\pi. \end{cases}$$

92. Designa-se por δ a função de Dirac com suporte na origem. Utilizando a transformada de Laplace resolva os seguintes problemas de valor inicial:

- (a) $y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,
- (b) $y'' + 4y = \delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$,
- (c) $y'' + y = \delta(t - \pi)\cos t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

93. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} = -2 \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \tan y, \\ y(1) = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{dy}{dt}(1) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Sugestão: Determine $v(y)$ tal que $\dot{y} = v(y)$.

Determine a solução geral de:

- 94. $y'' + t(y')^2 = 0$.
- 95. $2t^2 y'' + (y')^3 = 2ty'$.
- 96. $yy'' + (y')^2 = 0$.
- 97. $yy'' = 2(y')^2$.

Determine os valores de λ para os quais os seguintes problemas de valores fronteira têm soluções não triviais:

98. $y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0$; $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.
99. $y'' + \lambda y = 0$; $y(0) = y(2\pi)$, $y'(0) = y'(2\pi)$.
100. a) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t \geq 0$ e para $x \in [0, 1]$ de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = \sin 1 \end{cases}$$

(satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0, 1[$).

- b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x, 0) = 3\sin(2\pi x) - 7\sin(4\pi x) + \sin(x) .$$

101. Determine a solução dos seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira (PVIF):

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad x \in (0, \pi), \quad \text{com} \begin{cases} u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = \sin(x) - 2\sin(5x). \end{cases}$$

102. Determine a solução dos seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira (PVIF):

$$u_t = u_{xx} - u, \quad x \in (0, L), \quad \text{com} \begin{cases} u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = \cos(3\pi x/L). \end{cases}$$

Semana 11

103. Calcule a série de Fourier da função $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq x \leq 0, \\ +1 & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

104. Determine a série de Fourier da função $f(x) = x$, no intervalo $] -1, 1[$.
105. Determine a série de Fourier da função $g(x) = L - |x|$, no intervalo $[-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

106. Determine a série de Fourier da função $h(x) = x^2$, no intervalo $x \in [-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

107. Calcule a série de Fourier da onda sinusoidal rectificada, isto é, de

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } \operatorname{sen} x > 0 \\ 0 & \text{se } \operatorname{sen} x \leq 0 \end{cases}$$

108. a) Calcule, utilizando o Teorema dos Resíduos, os integrais

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}}{5 + 4\cos x} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

b) Deduza, da alínea anterior, os valores de

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{5 + 4\cos x} dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} nx}{5 + 4\cos x} dx.$$

c) Diga, justificando, qual o valor da soma da série $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \cos nx$ para cada $x \in [-\pi, \pi]$.

109. a) Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. O que pode dizer da paridade da função $f \circ g$ nos seguintes casos:

(1) f par, g ímpar (2) f ímpar, g ímpar (3) f par, g par (4) f ímpar, g par

b) Mostre que, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função ímpar diferenciável, então f' é par. Será que se f' for par, uma sua primitiva é necessariamente ímpar?

110. Desenvolva a função definida no intervalo $[0, 1]$ por $f(x) = x$ numa série de cossenos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

111. Desenvolva a função definida no intervalo $[0, 1]$ por $f(x) = 1$ numa série de senos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

112. Seja f a função definida no intervalo $(0, \pi)$ por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(2x), & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \quad \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$$

(a) Determine a série de senos da função f .

(b) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in]0, \pi[\\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

Semana 12

113. Considere a equação de propagação do calor $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. (*)
- Mostre que esta equação possui uma solução estacionária (isto é, que não depende do tempo) da forma $u(x) = Ax + B$.
 - Determine a solução estacionária para o problema correspondente a uma barra situada entre os pontos $x = 0$ e $x = L$, em que se fixam as temperaturas $u(0, t) = T_1$, $u(L, t) = T_2$.
 - Resolva a equação (*) para $0 \leq x \leq 1$ e para as condições iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} u(0, t) = 20 \\ u(1, t) = 60 \\ u(x, 0) = 75. \end{cases}$$
114. Seja a função f definida no intervalo $(0, \pi)$ por $f(x) = \sin(x)$.
- Determine a série de Fourier de cossenos da função f .
 - Diga, justificando, qual o valor da soma da série de Fourier da alínea anterior para cada x no intervalo $[-\pi, \pi]$.
 - Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u, & x \in]0, \pi[\\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$
115. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas
- $$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 \\ u(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 1 \end{cases}$$
- para $t \geq 0$ e para $x \in [0, 1]$, (satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0, 1[$) e onde c é um parâmetro real.
116. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação de Laplace
- $$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = \cos(2\pi x) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = \cos(2\pi y) \end{cases}$$
- para $x, y \in [0, 1]$.

117. a) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t \geq 0$ e para $x \in [0, \pi]$ de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

(satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0, \pi[$).

- b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x, 0) = (\pi - x)x .$$

118. Seja f a função definida no intervalo $]0, 2\pi[$ por $f(x) = x$.

(a) Determine a série de cossenos da função f .

(b) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - tu, & x \in (0, 2\pi) \\ u_x(0, t) = u_x(2\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

119. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(x, 0, t) = x, \quad u(x, 1, t) = x \\ u(0, y, t) = 0, \quad u(1, y, t) = 1 \\ u(x, y, 0) = x \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \cos(2\pi(x - y)) - \cos(2\pi(x + y)) \end{cases}$$

para $x, y \in [0, 1]$ e $t \in \mathbb{R}$.