Análise Matemática IV

1º semestre de 2001/2002

Exercício-teste 12

1. Calcule todas as soluções estacionárias (i.e., independente de t) da equação não homogénea
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \operatorname{sen}(x)\,.$$
Mostre que uma das soluções calculadas satisfaz as seguintes condições fronteira:
$$\begin{cases} u(t,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t, \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

2. Determine todos os valores (reais) de β para os quais o seguinte problema (equação diferencial ordinária, linear homogénea com condições na fronteira):
$$\begin{cases} X'' - \beta X = 0 \\ X(0) = X'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$
não tem solução única. Para esses valores determine a respectiva solução geral.

3. Resolva o problema.
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \operatorname{sen}(x) \\ \\ u(t,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t, \frac{\pi}{2}) = 0 \\ \\ u(0,x) = 2\operatorname{sen}(x) + 3\operatorname{sen}(5x) \end{cases}$$
($t \geq 0, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$).

   (a) **(sugestão:** use a alínea **1.** para tornar a equação homogénea e (só) depois considere o método de separação de variáveis**)**

Resolução

1. Se u não depende de t ($\dfrac{\partial u}{\partial t}=0$), temos

$$-\frac{d^2u}{dx^2}=\operatorname{sen}(x)$$

e primitivando duas vezes obtemos

$$u=\operatorname{sen}(x)+A+Bx$$

onde A e B são constantes arbitrárias. Esta é a expressão geral das soluções estacionárias. Tomando $A=B=0$ obtemos

$$u=\operatorname{sen}(x)\quad \text{e}\quad u'=\cos(x)$$

que satisfaz as igualdades:

$$u(0)=0\quad \text{e}\quad u'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

2. Para $\beta=0$ a equação $X''-\beta X=0$ tem como solução geral $X(x)=A+Bx$. Pelo que $X(0)=A=0$ e $X'\left(\frac{\pi}{2}\right)=B=0$. Portanto para este valor de β a solução é única ($X\equiv 0$).

Para $\beta\neq 0$ a equação $X''-\beta X=0$ tem como solução geral $X(x)=Ae^{\sqrt{\beta}x}+Be^{-\sqrt{\beta}x}$, porque o polinómio característico da equação é $P(\lambda)=\lambda^2-\beta=\left(\lambda-\sqrt{\beta}\right)\left(\lambda+\sqrt{\beta}\right)$. Então

$$X(0)=A+B\quad \text{e}\quad X'\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=\sqrt{\beta}Ae^{\sqrt{\beta}\frac{\pi}{2}}-\sqrt{\beta}Be^{-\sqrt{\beta}\frac{\pi}{2}}.$$

Então as condições fronteira impõem

$$B=-A\quad \text{e}\quad A\left(e^{\sqrt{\beta}\frac{\pi}{2}}+e^{-\sqrt{\beta}\frac{\pi}{2}}\right)=0.$$

Pelo que ou $A=B=0$, ou

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{\beta}\frac{\pi}{2}}+e^{-\sqrt{\beta}\frac{\pi}{2}}=0 \;&\Leftrightarrow\; e^{\sqrt{\beta}\pi}=-1\\ &\Leftrightarrow\; \sqrt{\beta}\pi=i\pi+i2n\pi\\ &\Leftrightarrow\; \sqrt{\beta}=i(1+2n)\end{aligned}$$

onde n é um número inteiro. Concluímos que para haver soluções não identicamente nulas temos de ter[1]

$$\beta=-(1+2n)^2\quad \text{com}\quad n=0,1,2\ldots$$

[1]Note-se que $(1+2n)^2=(1+2m)^2$ se $m=-n-1$.

Portanto só para estes valores de β a solução não é única e é dada por (para $\beta = -(1+2n)^2$)

$$X(x) = C\,\mathrm{sen}\,((1+2n)\,x)$$

onde C é uma constante arbitrária. Porque

$$\begin{aligned} X(x) &= A\left(e^{\sqrt{\beta}x} - e^{-\sqrt{\beta}x}\right) \\ &= A\left(e^{i(1+2n)x} - e^{-i(1+2n)x}\right) \\ &= C\,\mathrm{sen}\,((1+2n)\,x) \end{aligned}$$

3. Seja $v(t,x) = u(t,x) - \mathrm{sen}\,(x)$. Então

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mathrm{sen}\,(x) = 0.$$

Pelo que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \\ v(t,0) = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(t,\frac{\pi}{2}) = 0 \\ v(0,x) = \mathrm{sen}\,(x) + 3\,\mathrm{sen}\,(5x) \end{cases}$$

Pelo método de separação de variáveis obtemos soluções de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ w(t,0) = 0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial x}(t,\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

da forma $w(t,x) = T(t)\,X(x)$. Temos sucessivamente (usando os cálculos da alínea **2.** e a menos de constantes multiplicativas)

$$\begin{cases} X'' = \beta X \\ X(0) = X'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad T' = \beta T,$$

$$X(x) = \mathrm{sen}\,((1+2n)\,x) \quad \text{e} \quad T(t) = e^{-(1+2n)^2 t}$$

e

$$w(t,x) = e^{-(1+2n)^2 t}\,\mathrm{sen}\,((1+2n)\,x)\,.$$

Fazendo uma combinação linear infinita destas soluções chegamos a uma solução formal de (*) :

$$v(t,x)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{-(1+2n)^2 t}\operatorname{sen}((1+2n)x).$$

Finalmente considerando a condição inicial temos

$$\begin{aligned} v(0,x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \operatorname{sen}((1+2n)x) \\ &= \operatorname{sen}(x)+3\operatorname{sen}(5x) \end{aligned}$$

Portanto $c_n = 0$ se $n \neq 0$ e 2; $c_0 = 1$ e $c_2 = 3$.

Podemos então escrever a solução do problema proposto:

$$\begin{aligned} u(t,x) &= v(t,x)+\operatorname{sen}(x) \\ &= \left(1+e^{-t}\right)\operatorname{sen}(x)+3e^{-25t}\operatorname{sen}(5x) \end{aligned}$$