

# Análise Matemática IV

## 1º semestre de 2001/2002

### Exercício-teste 10

Resolva o sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + e^{-8t} \\ y_2' = -64y_1 - 16y_2 - 8e^{-8t} \end{cases}$$

com a seguinte condição inicial:

$$y_1(1) = 1 \text{ e } y_2(1) = -8.$$

### Resolução

O sistema pode ser posto na seguinte forma matricial:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{h}(\mathbf{t})$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -64 & -16 \end{bmatrix} \quad \mathbf{h}(\mathbf{t}) = e^{-8t} \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

**Cálculo de  $e^{\mathbf{A}t}$ :**

A matriz  $\mathbf{A}$  só tem um valor próprio (com multiplicidade algébrica igual a 2):

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 &\Leftrightarrow \lambda(16 + \lambda) + 64 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 + 16\lambda + 64 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda + 8)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = -8. \end{aligned}$$

Um vector próprio  $\mathbf{u}$  associado a  $\lambda = -8$  é uma solução da equação

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + 8\mathbf{I})\mathbf{u} = 0 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -64 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow 8u_1 + u_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow u_2 = -8u_1 \end{aligned}$$

e então uma base dos vectores próprios é constituída, por exemplo, pelo vector

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

Concluimos então que o valor próprio  $\lambda = -8$  tem multiplicidade geométrica igual a 1 (dimensão do espaço dos vectores próprios) pelo que temos um único bloco de Jordan dado por

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -8 & 1 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}.$$

Um vector próprio generalizado  $\mathbf{w}$  associado ao vector próprio  $\mathbf{u}$  é uma solução da equação

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} + 8\mathbf{I}) \mathbf{w} = \mathbf{u} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -64 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow 8w_1 + w_2 = 1 \\ &\Leftrightarrow w_2 = 1 - 8w_1.\end{aligned}$$

Tomando por exemplo  $w_1 = 0$  e  $w_2 = 1$  obtemos

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, uma decomposição de Jordan para a matriz  $\mathbf{A}$  é

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{J}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} -8 & 1 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \mathbf{S}^{-1}$$

com

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}.$$

Temos então

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix},$$

e

$$\begin{aligned}e^{\mathbf{A}t} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-8t} & te^{-8t} \\ 0 & e^{-8t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-8t} & te^{-8t} \\ -8e^{-8t} & e^{-8t}(1-8t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \\ &= e^{-8t} \begin{bmatrix} 1+8t & t \\ -64t & 1-8t \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Uma vez calculado  $e^{\mathbf{A}t}$  temos pela fórmula da variação das constantes:

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}(t-1)}\mathbf{y}(1) + \int_1^t e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{h}(s) ds.$$

Atendendo à condição inicial  $\mathbf{y}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix}$ ,

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t) &= e^{-8(t-1)} \begin{bmatrix} 1+8(t-1) & t-1 \\ -64(t-1) & 1-8(t-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix} + \\ &\quad + \int_1^t e^{-8(t-s)} \begin{bmatrix} 1+8(t-s) & t-s \\ -64(t-s) & 1-8(t-s) \end{bmatrix} \cdot e^{-8s} \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix} ds \\ &= e^{-8(t-1)} \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix} + \int_1^t e^{-8t} \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix} ds \\ &= e^{-8(t-1)} \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix} + (t-1)e^{-8t} \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-8(t-1)} + (t-1)e^{-8t} \\ -8(e^{-8(t-1)} + (t-1)e^{-8t}) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Assim, a solução do sistema dado é:

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{-8(t-1)} + (t-1)e^{-8t} \\ y_2(t) = -8(e^{-8(t-1)} + (t-1)e^{-8t}) \end{cases}.$$