

Análise Matemática IV

1º semestre de 2001/2002

Exercício-teste 9

Considere a seguinte matriz:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

1. Verifique que $\mathbf{M}^3 = \mathbf{0}$.
2. Calcule $e^{t\mathbf{M}}$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$. (sugestão: **USE A ALÍNEA ANTERIOR**)
3. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = -2x + y + 3z \\ y' = 4x - 2y + 2z \\ z' = -8x + 4y + 4z \end{cases} \quad \text{com} \quad \begin{cases} x(1) = 1 \\ y(1) = 2 \\ z(1) = 3 \end{cases}$$

(sugestão: **USE A ALÍNEA ANTERIOR**)

Resolução

1. De facto:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^2 &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 4 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -16 & 8 & 8 \\ -32 & 16 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^3 &= \begin{bmatrix} -16 & 8 & 8 \\ -32 & 16 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 4 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. Pela definição de exponencial de uma matriz temos:

$$\begin{aligned}
 e^{t\mathbf{M}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{M}^k \\
 &= \mathbf{Id} + t\mathbf{M} + \frac{t^2}{2} \mathbf{M}^2 \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 4 & 4 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{bmatrix} -16 & 8 & 8 \\ -32 & 16 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 - 2t - 8t^2 & t + 4t^2 & 3t + 4t^2 \\ 4t - 16t^2 & 1 - 2t + 8t^2 & 2t + 8t^2 \\ -8t & 4t & 1 + 4t \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

3. A solução é dada por:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} &= e^{(t-1)\mathbf{M}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 3 - 2t - 8(t-1)^2 & t - 1 + 4(t-1)^2 & 3t - 3 + 4(t-1)^2 \\ 4t - 4 - 16(t-1)^2 & 3 - 2t + 8(t-1)^2 & 2t - 2 + 8(t-1)^2 \\ -8t + 8 & 4t - 4 & -3 + 4t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 9t - 8 + 12(t-1)^2 \\ 6t - 4 + 24(t-1)^2 \\ 12t - 9 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Ou seja

$$x(t) = 9t - 8 + 12(t-1)^2$$

$$y(t) = 6t - 4 + 24(t-1)^2$$

$$z(t) = 12t - 9$$