

# Análise Matemática IV

## 1º semestre de 2001/2002

### Exercício-teste 8

Determine se o seguinte problema de valor inicial:

$$y + (t + 2y) \frac{dy}{dt} = 0 \quad (1)$$

$$y(0) = 0, \quad (2)$$

tem uma solução única. Explique porque é que a equação (1) tem uma e só uma solução que satisfaz a condição inicial  $y(0) = y_0 \neq 0$ .

### Resolução

Sejam  $M(t, y) = y$  e  $N(t, y) = t + 2y$ . Então equação (1) tem da forma

$$M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0.$$

Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial t} = 1$$

equação (1) é exacta. Portanto existe  $\phi(t, y)$  tal que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = M = y \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = N = t + 2y. \quad (4)$$

Integrando a equação (3) obtém-se  $\phi(t, y) = t \cdot y + h(y)$ , e aplicando equação (4) temos

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = t + h' = t + 2y.$$

Logo  $h(y) = y^2 + C$ , onde  $C$  é uma constante, que se pode tomar nula, e  $\phi(t, y) = t \cdot y + y^2$ . Como além disso  $y(0) = 0$ , temos uma solução implícita  $\phi(t, y) = \phi(0, 0)$ , ou seja  $(t + y) \cdot y = 0$ . Duas soluções do PVI são dadas por

$$y_1(t) = 0 \quad \text{e} \quad y_2(t) = -t.$$

Note que  $N(0, y_0) = 2y_0$  é nulo se e só se  $y_0 = 0$ . Portanto, se  $y_0 \neq 0$ , a equação (1) tem uma solução única que satisfaz  $y(0) = y_0$ . Nesse caso a solução implícita é dada por  $y^2 + ty - y_0^2 = 0$ . Logo a única solução é

$$y(t) = \frac{-t + \sqrt{t^2 + 4y_0^2}}{2} \quad \text{se } y_0 > 0$$

ou

$$y(t) = \frac{-t - \sqrt{t^2 + 4y_0^2}}{2} \quad \text{se } y_0 < 0.$$

Note que

$$y(t) = \frac{1}{2} \left( -t + \frac{y_0}{|y_0|} \sqrt{t^2 + 4y_0^2} \right) \quad \text{se } y_0 \neq 0.$$