Análise Matemática IV
1º semestre de 2001/2002

Exercício-teste 7

Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{y} & = & \dfrac{e^t}{(1+e^t)\,y} \\[2ex] y(0) & = & -\sqrt{\ln 4}. \end{cases}$$

Resolução

A equação $\dot{y} = \dfrac{e^t}{(1+e^t)\,y}$ é uma equação separável e pode ser escrita para $y \neq 0$ na forma

$$y\dot{y} = \frac{e^t}{1+e^t}.$$

Integrando ambos os lados obtém-se

$$\frac{(y(t))^2}{2} = \ln\left(1+e^t\right) + C,$$

pelo que as soluções satisfazem a equação

$$(y(t))^2 = \ln\left(1+e^t\right)^2 + 2C.$$

Assim, a solução geral da equação diferencial considerada é dada pelas funções

$$\begin{aligned} y(t) &= \sqrt{\ln\left(1+e^t\right)^2 + 2C} \\ y(t) &= -\sqrt{\ln\left(1+e^t\right)^2 + 2C} \end{aligned}$$

onde C é uma constante arbitrária. Como além disso $y(0) = -\sqrt{\ln 4}$, a solução do PVI obtém-se com $C = 0$ e é dada por

$$y : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^- \quad \text{tal que} \quad y(t) = -\sqrt{\ln\left(1+e^t\right)^2}.$$