

Análise Matemática IV

1º semestre de 2001/2002

Exercício-teste 6

Determine a solução do seguinte problema:

$$\begin{cases} y' + a(t)y = a(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

onde

$$a(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t < 2\pi \\ \cos(t) & \text{se } t \geq 2\pi \end{cases}$$

Resolução

Para $t < 2\pi$ temos

$$y' + y = 1$$

multiplicando por um factor de integração $\mu \neq 0$, obtemos

$$(\mu y)' = \mu$$

se

$$\mu' = \mu$$

como por exemplo $\mu = e^t$. Então

$$e^t y = e^t + c.$$

Como $y(0) = 0$, obtemos

$$y = 1 - e^{-t}.$$

Pelo que

$$y(2\pi) = 1 - e^{-2\pi}.$$

Para $t > 2\pi$ temos

$$y' + \cos(t)y = \cos(t)$$

multiplicando por um factor de integração $\mu \neq 0$, obtemos

$$(\mu y)' = \mu \cos(t)$$

se

$$\mu' = \cos(t) \mu$$

como por exemplo $\mu = e^{\text{sen } t}$. Então

$$e^{\text{sen } t} y = e^{\text{sen } t} + \tilde{c}.$$

Como $y(2\pi) = 1 - e^{-2\pi}$, obtemos

$$y = 1 - e^{-(2\pi + \text{sen } t)}.$$

Concluimos que a solução pretendida é

$$y(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t} & \text{se } t < 2\pi \\ 1 - e^{-(2\pi + \text{sen } t)} & \text{se } t \geq 2\pi \end{cases}$$