

Análise Matemática IV

1º semestre de 2001/2002

Exercício-teste 5

Determine a série de Laurent convergente em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ da função

$$f(z) = \frac{z+1}{z-1} \cos\left(\frac{2}{z-1}\right).$$

Aproveite o resultado para calcular

$$\oint_{|z-1|=1} f(z) dz,$$

onde a circunferência $|z-1|=1$ é percorrida uma vez no sentido positivo.

Resolução

Temos $\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ para $z \in \mathbb{C}$. Logo

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z+1}{z-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{2}{z-1}\right)^{2n} \\ &= \left(\frac{z-1+2}{z-1}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{2}{z-1}\right)^{2n} \\ &= \left(1 + \frac{2}{z-1}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{(z-1)^{2n}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{(z-1)^{2n}} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n)!} \frac{1}{(z-1)^{2n+1}} \end{aligned}$$

A série de Laurent pretendida é $1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{-k}}{(z-1)^k}$, onde

$$a_{-k} = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{2^k}{k!} & \text{se } k \text{ par } (k=2n), \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{2^k}{(k-1)!} & \text{se } k \text{ impar } (k=2n+1). \end{cases}$$

Pelo teorema dos resíduos obtemos:

$$\begin{aligned} \oint_{|z-1|=1} f(z) dz &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=1} f(z) \\ &= 2\pi i a_{-1} \\ &= 4\pi i. \end{aligned}$$