

Análise Matemática IV

1º semestre de 2001/2002

Exercício-teste 3

Calcule o seguinte integral:

$$\oint_{|z|=1} \bar{z} \log z \, dz,$$

onde a curva $|z| = 1$ é percorrida uma vez no sentido positivo e $\log z$ designa a determinação principal do logaritmo.

Resolução

Considerando o caminho $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ com $\theta \in]-\pi, \pi]$, temos para o ramo principal do logaritmo

$$\log \gamma(\theta) = i\theta,$$

$\overline{\gamma(\theta)} = e^{-i\theta}$ e $\frac{d}{d\theta} \gamma(\theta) = ie^{i\theta}$. Então

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=1} \bar{z} \log z \, dz &= \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\gamma(\theta)} \log \gamma(\theta) \gamma'(\theta) \, d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta} i\theta i e^{i\theta} \, d\theta \\ &= - \int_{-\pi}^{\pi} \theta \, d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$