

Análise Matemática IV  
1º Semestre 2001/2002

2º Exame

31 de Janeiro de 2002 - 17 h

Duração: 3 horas.

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Considere a função  $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$f(z) = f(x + yi) = e^x (x \cos y - \alpha y \sin y) + i e^x (\alpha y \cos y + x \sin y),$$

onde  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

(1,5 val.)

a) Verifique que existe um único valor de  $\alpha$  para o qual  $f$  é analítica.

(1,0 val.)

b) Para esse valor de  $\alpha$  calcule

$$\oint_C \frac{f(z)z}{(z-1)^2} dz$$

onde  $C$  é a circunferência de centro na origem e raio 2, percorrida uma vez no sentido directo.

2. Considere a seguinte função:

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^4} + \frac{1}{z(z^2 - 1)}$$

definida para todos os valores de  $z$  em que esta expressão tem significado.

(1,0 val.)

a) Determine a série de Laurent em potências de  $z$  da função  $f$ , válida numa região da forma  $0 < |z| < R$ . Qual o valor máximo de  $R$ ?

(1,5 val.)

b) Classifique as singularidades de  $f(z)$  e calcule os respectivos resíduos.

(1,5 val.)

c) Calcule os seguintes integrais complexos:

i)  $\oint_C f(z) dz$

ii)  $\oint_C \frac{f(z)}{z} dz$

onde  $C$  é a circunferência de centro na origem e raio 2, percorrida uma vez no sentido directo.

(2,0 val.)

3. Calcule o integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4 \cos \theta}.$$

**Volte S. F. F.**

- (2,0 val.) 4. Resolva o seguinte problema de valor inicial. Explícite a solução e indique o seu intervalo máximo de definição:

$$\begin{cases} y + (ty + t \log t) \dot{y} = 0 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

- (2,0 val.) 5. Determine a solução do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 + y_2 & , & y_1(0) = \frac{1}{2} \\ \dot{y}_2 = 4y_1 - 2y_2 - 2e^t & , & y_2(0) = 0. \end{cases}$$

- (1,5 val.) 6. Determine a solução geral do seguinte equação diferencial.

$$\frac{d^4 y}{dt^4} - y = e^{2t}$$

7. Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} \text{(A)} & \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \\ \text{(B)} & \begin{cases} u(t, 0) = 0 \\ u(t, 1) = 0 \end{cases} \\ \text{(C)} & u(0, x) = x(1-x)e^x. \end{cases}$$

- (1,0 val.) a) Calcule a série de senos da função  $x(1-x)$  definida no intervalo  $[0, 1]$ .

- (1,0 val.) b) Resolva o seguinte problema de fronteira

$$\begin{cases} X'' - 2X' = \beta X \\ X(0) = 0 \\ X(1) = 0. \end{cases}$$

- (1,0 val.) c) Determine a função  $u$  que satisfaz (A), (B) e (C).

- (3,0 val.) 8. Determine todas as funções  $f(z)$  analíticas no semiplano  $\operatorname{Re} z > 0$  que têm parte real apenas dependente de  $|z|^2$ .