

Análise Matemática IV

1º Semestre 2001/2002

2º Teste / 1º Exame

17 de Janeiro de 2002 - 17 h

Duração: Teste: 1 hora e 30 minutos; Exame: 3 horas.

O 2º Teste começa na questão 5.

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Considere a função $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u(x, y) = x(x^2 - 3y^2) + y(y^2 - 3x^2).$$

(1,5 val.)

- a) Determine uma função harmónica $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

seja analítica e satisfaça $f(i) = 1 - i$.

(1,0 val.)

- b) Calcule

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz$$

onde C é a circunferência de centro na origem e raio 2, percorrida uma vez no sentido directo.

2. Considere a seguinte função:

$$f(z) = \frac{e^{z^2} - z^2}{z^5} + \frac{z^2 + 1}{z - i}$$

definida para todos os valores de z em que esta expressão tem significado.

(1,0 val.)

- a) Determine a série de Laurent em potências de z da função $f(z)$. Para que valores de z esta função coincide com a série calculada?

(1,5 val.)

- b) Classifique as singularidades de $f(z)$ e calcule os respectivos resíduos.

(1,5 val.)

- c) Calcule os seguintes integrais complexos:

i) $\oint_C f(z) dz$

ii) $\oint_C \frac{f(z)}{z} dz$

onde C é a circunferência de centro na origem e raio 2, percorrida uma vez no sentido directo.

(2,0 val.)

3. Calcule o integral

$$\int_0^\infty \frac{x \sin(2x)}{x^2 + 3} dx.$$

(1,5 val.)

4. Qual o raio de convergência da série de Taylor em torno do ponto $z = 2 + i$ da função

$$f(z) = \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{z}}?$$

Volte S. F. F.

Início do 2º Teste

- (2,0 val.) 5. Resolva o seguinte problema de valor inicial. Explícite a solução e indique o seu intervalo máximo de definição:

$$\begin{cases} 1 - t^2 y + t^2 (y - t) \dot{y} = 0 \\ y(1) = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

- (1,5 val.) 6. Determine a solução do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 3y_1 - 2y_2 & y_1(0) = 0 \\ \dot{y}_2 = y_1 & y_2(0) = 1. \end{cases}$$

- (2,0 val.) 7. Determine a solução geral da equação diferencial

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = e^{-t}.$$

8. Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} \text{(A)} & \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u - t \\ \text{(B)} & \begin{cases} u(t, -\pi) = u(t, \pi) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, -\pi) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi) \end{cases} \\ \text{(C)} & u(0, x) = 1 + \sin x - \cos 3x. \end{cases}$$

- (1,0 val.) a) Encontre as soluções uniformes $u_0(t)$ da equação (A) (i. e. soluções que **não** dependem de x). Verifique que uma destas soluções satisfaz $u_0(0) = 1$.

- (1,0 val.) b) Resolva o seguinte problema de fronteira

$$\begin{cases} X'' = \beta X \\ X(-\pi) = X(\pi) \\ X'(-\pi) = X'(\pi). \end{cases}$$

- (1,0 val.) c) Determine a função u que satisfaz (A), (B) e (C).

9. Seja $n > 1$ um inteiro, e considere a equação diferencial

$$\dot{y} + P(t)y = Q(t)y^n,$$

que se chama *equação de Bernoulli*.

- (0,5 val.) a) Mostre que a substituição $v = y^{1-n}$ transforma essa equação numa equação linear na variável v .

- (1,0 val.) b) Resolva a equação diferencial

$$3t\dot{y} + y + t^2 y^4 = 0, \quad \text{com } y(1) = 1.$$