

Análise Matemática IV

2º semestre de 2000/2001

Exercício-teste 4

Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \bar{z} + cx \quad \text{para qualquer } z = x + yi \in \mathbb{C},$$

e em que c é uma constante complexa. Sejam C_1 e C_2 duas curvas unindo os pontos $-i$ e i (com esta orientação), em que C_1 une $-i$ a i pelo segmento de recta e C_2 une $-i$ a i pela semicircunferência de raio 1 que pertence ao semiplano $\operatorname{Re} z \geq 0$.

- (a) Calcule $\int_{C_1} f(z) dz$ e $\int_{C_2} f(z) dz$.
- (b) Indique o (único) valor de c para o qual o integral ao longo de qualquer curva simples unindo $-i$ a i (com esta orientação) não depende da curva. Justifique convenientemente a resposta.

Resolução

- (a) Uma parametrização conveniente de C_1 é $z = it$, com $-1 \leq t \leq 1$. Assim:

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{-1}^1 (-it) i dt = \int_{-1}^1 t dt = 0.$$

Quanto a C_2 , tomamos $z = e^{it}$, com $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Desta forma:

$$\begin{aligned} \int_{C_2} f(z) dz &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (e^{-it} + c \cos t) i e^{it} dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} i dt + ci \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t (\cos t + i \sin t) dt \\ &= i\pi + ci \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt - c \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t \cos t dt \\ &= i\pi + ci \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt - \frac{c}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 2t dt \\ &= i\pi + ci \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - 0 \\ &= i\pi + ci \frac{\pi}{2} = \left(1 + \frac{c}{2} \right) i\pi \end{aligned}$$

(b) Pelos resultados anteriores, teremos necessariamente que ter

$$\left(1 + \frac{c}{2}\right) i\pi = 0,$$

ou seja $c = -2$. Mas isto mostra apenas que $c = -2$ é uma condição necessária para que o integral não dependa da curva. Porém, para $c = -2$,

$$f(z) = x - yi - 2x = -x - yi = -z,$$

Assim, f é uma função analítica em todo o plano complexo. Então, pelo teorema de Cauchy, $c = -2$ é também condição suficiente para que o integral não dependa da curva.