

Análise Matemática IV

2º semestre de 2000/2001

Exercício-teste 2

Considere-se a função

$$f(z) = \begin{cases} \frac{(\bar{z})^2}{z} & \text{se } z \neq 0, \\ 0 & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

Determine se $f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z}$ existe.

Resolução

Se $z \neq 0$ então existem $r > 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$ tais que $z = r \exp(i\theta)$. Note-se que $\exp(i\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$. Obtém-se que

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{(\bar{z})^2}{z^2} = \frac{r^2 \exp(-i2\theta)}{r^2 \exp(i2\theta)} = \exp(-i4\theta).$$

Segue-se que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z}$ não existe. Por exemplo, se $z = r \exp(i\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}r}{2}(1+i)$, então

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(r \exp(i\frac{\pi}{4}))}{r \exp(i\frac{\pi}{4})} = \exp(-i\pi) = -1,$$

e se $z = r \exp(0) = r$, então

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(r \exp(0))}{r \exp(0)} = \exp 0 = 1.$$

Temos então dois limites direccionais diferentes quando $z \rightarrow 0$, pelo que não existe $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z}$.

Note-se que se $z \neq 0$ tem-se que $f(z) = \frac{(\bar{z})^2}{z} = \frac{(\bar{z})^2}{z} \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{(\bar{z})^3}{|z|^2}$. Logo

$$u(x, y) = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} \quad v(x, y) = \frac{y^3 - 3x^2y}{x^2 + y^2},$$

onde $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^3} = 1 & \frac{\partial v}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^3}{y^3} = 1 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^3} = 0 & -\frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{0}{x^3} = 0, \end{aligned}$$

e as equações de Cauchy-Riemann são validas na origem. Mas as derivadas parciais $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$ não são contínuas na origem. Por exemplo, se $(x, y) \neq (0, 0)$ tem-se que

$$\begin{aligned} u &= \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} & \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{(3x^2 - 3y^2)(x^2 + y^2) - 2x(x^3 - 3xy^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ & & &= \frac{3(x^4 - y^4) - 2x^4 + 6x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ & & &= \frac{x^4 + 6x^2y^2 - 3y^4}{(x^2 + y^2)^2} \\ & & &= \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 - 4y^4}{(x^2 + y^2)^2} \\ & & &= 1 + 4y^2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Ora, se $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial u}{\partial x}$ existisse, então

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=y}} 1 + 4y^2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + 4x^2 \frac{x^2 - x^2}{(x^2 + x^2)^2} = 1, \\ &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} 1 + 4y^2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 1 + 4y^2 \frac{-y^2}{y^4} = -3 \end{aligned}$$

que é absurdo.