

2º EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA IV

CURSOS: todos

01/ II/ 2001

Duração: 3 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

I – (3 v.) Para certos valores de $a, b \in \mathbb{R}$, a função:

$$u(x, y) = a(xy^3 + x^2) + bx^3y - y^2,$$

é a parte real de uma função analítica em $\mathbb{C}$.

1. Identifique esses valores de a e b .

2. Determine a parte imaginária duma função $f(z)$, analítica em $\mathbb{C}$, cuja parte real é da forma indicada na alínea 1 e que satisfaz $f(i) = -1 + i$.

3. Calcule os integrais

a) $\oint_{|z-i|=1} \frac{f(z)}{z-i} dz,$

b) $\oint_{|z-i|=1} \frac{f(z)}{(z-i)^2} dz.$

onde a circulação é no sentido positivo.

II – (3 v.) Considere a função

$$g(z) = \frac{z}{(e^z - 1)^2} + (z^2 - 2z)e^{\frac{z}{2}}.$$

1. Indique e classifique as singularidades de $g(z)$.

2. Calcule

$$\oint_{|z|=1} g(z) dz.$$

(considere o sentido positivo).

III – (2 v.) Utilize o teorema dos resíduos para calcular o integral real:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + \cos x} dx.$$

IV – (3 v.) Para cada um dos seguintes problemas de valor inicial, determine explicitamente a solução $y(t)$.

1. $y' + \frac{1}{t-3}y = \sin t; \quad y(0) = 0.$

2. $(3t^2y^2 + t) + (t^3 + 1)yy' = 0; \quad y(0) = 1.$

Nota: A equação 2. admite um factor integrante da forma $\mu = \mu(t)$.

VIRE, SE FAZ FAVOR

V – (2 v.) Considere a seguinte matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Calcule $e^{t\mathbf{A}}$.
2. Seja $\mathbf{x}$ a solução do problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$, $\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. Determine $\mathbf{x}(2)$.

VI – (1,5 v.) Determine a solução geral de;

$$y'' - 3y' + 2y = e^t.$$

VII – (3,5 v.)

1. Determine a série de Fourier de

$$F(x) = x|x|, \quad x \in [-1, 1[.$$

Em que pontos do intervalo $[-1, 1[$ pode garantir que a série de Fourier obtida converge para $F(x)$?

2. Resolva o problema de condições na fronteira:

$$\begin{cases} X'' - 2X' + X = \beta X \\ X(1) = X(0) = 0 \end{cases}$$

3. Use o resultado anterior para obter uma solução formal de:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x} + u \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad t > 0 \\ u(0, x) = x^2 e^x, \quad x \in [0, 1] \end{cases}$$

VIII – (2,0 v.) Considere a seguinte equação diferencial escalar de primeira ordem:

$$y' = (e^{-t} - y^2) y.$$

Mostre que qualquer solução $y(t)$ desta equação satisfaz a seguinte relação:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0.$$