

1º EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA IV

CURSOS: todos

16/ I/ 01

Duração: 3 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

I – (3 v.) Para certo valor de $\alpha \in \mathbb{R}^+$, a função

$$u(x, y) = e^{\alpha x} \sin(\pi y)$$

é a parte real de uma função $f(z)$ analítica em $\mathbb{C}$ e tal que $f(0) = i$.

1. Calcule o valor de α .
2. Determine a parte imaginária de $f(z)$.
3. Calcule os integrais

a) $\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz$

b) $\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^2} dz.$

(Considere o sentido positivo.)

II – (3 v.) Considere a função

$$g(z) = \frac{e^{iz} - 1}{\sin z} + z^2 \sin \frac{1}{z}.$$

1. Indique e classifique as singularidades da função $g(z)$.
2. Calcule o seguinte integral

$$\oint_{|z|=4} g(z) dz.$$

(Considere o sentido positivo.)

III – (2 v.) Utilize o teorema dos resíduos para calcular o integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx.$$

IV – (3 v.) Para cada um dos seguintes problemas de valor inicial, determine a solução $y(x)$ e indique o seu intervalo máximo de definição.

1. $y' - y \operatorname{tg} x = 2x \frac{\cos x^2}{\cos x}; \quad y(0) = 0.$

2. $y' - \frac{x \cos x^2}{y + 2} = 0; \quad y(0) = 0.$

VIRE, SE FAZ FAVOR

V – (1,5 v.) Resolva o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = x \end{cases}$$

VI – (2 v.) Determine a solução geral de;

$$y'' - 2y' + y = t^2 + 1.$$

VII – (3,5 v.)

1. Determine a série de Fourier de

$$F(x) = |x| + \cos 2x, \quad x \in [-\pi, \pi[.$$

Em que pontos do intervalo pode garantir que a série de Fourier obtida converge para $F(x)$?

2. Resolva o problema de condições na fronteira:

$$\begin{cases} X'' + \beta X = 0 \\ X'(\pi) = X'(0) = 0 \end{cases}$$

3. Use o resultado anterior para obter uma solução formal de:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi) = 0, \quad t > 0 \\ u(0, x) = x + \cos 2x, \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

VIII – (2,0 v.) Considere a equação:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + e^{\lambda t}\mathbf{v},$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz $n \times n$ de coeficientes reais, com n valores próprios distintos, sendo λ um deles e $\mathbf{v}$ um vector próprio associado.

1. Mostre que a equação tem uma solução da forma:

$$\phi(t) = te^{\lambda t}\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n.$$

2. Mostre que a equação não admite soluções da forma:

$$\phi(t) = e^{\lambda t}\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n.$$