

2º TESTE/1º EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA IV

CURSOS: Eng. Mecânica, Eng. Química, Química, Eng. Biológica

1ª Época – 26/VI/00 Duração: 1h30mn/3h

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

I – (3 v.) Considere a função complexa de variável complexa definida por:

$$g(z) = z^3 - \bar{z}^3$$

1. Determine o conjunto de pontos em que $g(z)$ satisfaz as equações de Cauchy-Riemann. O que pode concluir sobre a analiticidade da função g ?
2. Mostre que a parte real e a parte imaginária de $g(z)$ são funções harmónicas e determine uma função $f(z)$ analítica em $\mathbb{C}$, cuja parte imaginária coincide com a parte imaginária da função $g(z)$ e tal que $f(0) = 5$.
3. Utilizando a função $f(z)$ determinada na alínea anterior, calcule

$$\oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-i)^2} dz.$$

(Considere o sentido positivo.)

II – (3,5 v.) Considere a função $f(z) = \frac{2z+1}{\sin(2\pi z)} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(i8)^n} z^{3n-4}$.

1. Determine o interior da região de convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(i8)^n} z^{3n-4}$.
2. Indique e classifique as singularidades da função $f(z)$ situadas no círculo $|z| < 1$.
3. Calcule os resíduos de $f(z)$ nestas singularidades.
4. Indique os possíveis valores para o integral de f ao longo de curvas fechadas simples seccionalmente regulares contidas no círculo $|z| < 1$.

III – (2 v.) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$(1+t^2)y' - 2ty^3 = 0; \quad y(0) = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

Indique o intervalo máximo de definição desta solução.

VIRE, SE FAZ FAVOR

TESTE

IV – (3 v.) Considere a seguinte matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Calcule $e^{t\mathbf{A}}$.
2. Seja $\mathbf{x}$ a solução do problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(1) = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$. Determine $\mathbf{x}(2)$.

V – (2 v.) Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$y'' + 4y = \sin(2t) ; \quad y(0) = 0 ; \quad y'(0) = 1.$$

VI – (3,5 v.)

1. Determine a série de senos da função $f(x) = x^2 - x$ no intervalo $[0, 1]$.
2. Resolva a equação:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + u, & x \in]0, 1[\\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = x^2 - x. \end{cases}$$

VII – (1,5 v.) Sendo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e $g(t, y) = y^2 - t$, considere a seguinte equação diferencial:

$$f \circ g(t, y) - f' \circ g(t, y) + 2yf' \circ g(t, y) \frac{dy}{dt} = 0.$$

1. Determine um factor de integração para esta equação.
2. Para que condições iniciais $y(t_0) = y_0$ pode garantir a existência e unicidade de solução?

FIM DO TESTE

VIII – (1,5 v.) Seja $f(z)$ uma função analítica em $\mathbb{C}$ e considere a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(\theta) = \operatorname{Re} [f(e^{i\theta}) + f(e^{-i\theta})].$$

1. Mostre que g é uma função periódica par.
2. Relacione as derivadas da função $f(z)$ em $z = 0$ com os coeficientes da série de Fourier da função $g(\theta)$.